

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДИНАМИКИ ПУЛЬСРОДОНА

В. В. Галушко

*Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба РАН»
(ФИЦ ЕГС РАН),
Россия, 249035, г. Обнинск, пр. Ленина, 189,
e-mail: galushko_v@gsras.ru*

Рассматриваются уравнения, описывающие динамику пульсродона в подвижной системе координат, связанной с центром масс и главными осями эллиптического вихря. Найдено простое и наглядное общее решение системы уравнений в квадратурах. Проведено полное исследование решений в зависимости от параметров задачи. Получены новые частные решения, которые представляют интерес для исследователей.

Ключевые слова: пульсон, родон, пульсродон, уравнения мелкой воды, редуцированная гравитация, эллиптический вихрь, глубоководная линза, первые интегралы, параметрическое пространство

1. Введение

Исследованию динамики мезомасштабных вихрей в океане в последние три десятилетия посвящено значительное количество теоретических работ. Причиной этому является экспериментальное обнаружение в 70-х годах прошлого столетия поверхностных вихрей – рингов с теплым ядром, порождаемых в Атлантическом океане Гольфстримом, а также внутритермоклинных вихревых образований (80-е годы) – глубоководных линз.

Достаточно обширная библиография, посвященная наблюдениям вихрей в океане, в том числе рингов и линз, приведена в обзорной статье (Монин, Жихарев, 1990), где, в частности, отмечается, что глубоководные линзы, открытые в 80-х годах, на самом деле многократно наблюдались в различных районах океанов, начиная с 30-х годов XX века.

Характерная особенность таких объектов состоит в том, что в плане они имеют круговую или эллиптическую форму и их горизонтальные масштабы на два порядка превышают вертикальные, поэтому модели вихрей описываются уравнениями мелкой воды на f -плоскости в приближении редуцированной гравитации:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} - fV &= -\tilde{g} \frac{\partial h}{\partial X}, & \frac{dV}{dt} + fU &= -\tilde{g} \frac{\partial h}{\partial Y}, \\ \frac{dh}{dt} + h \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) &= 0, & \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Галушко В. В.

где (U, V) – компоненты скорости; X, Y – горизонтальные координаты, связанные с центром масс вихря; f – параметр Кориолиса; \tilde{g} – редуцированное ускорение силы тяжести; $h(X, Y, t)$ – толщина эллиптического вихря:

$$h = h_0 + AX^2 + 2BXY + CY^2, \quad AC - B^2 > 0. \quad (1.2)$$

В качестве обычного приближения предполагается, что поле скорости линейно по координатам

$$U = U_1X + U_2Y, \quad V = V_1X + V_2Y, \quad (1.3)$$

а коэффициенты, входящие в (1.2–1.3), являются функциями времени. Подстановка данных представлений в (1.1) приводит уравнения с частными производными к системе восьми обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно, что система, полученная таким образом, допускает пять первых интегралов, соответствующих законам сохранения объема, энергии, момента импульса, потенциального вихря и момента инерции вихря. Их использование приводит в конечном итоге к решению задачи в квадратурах.

Не останавливаясь на обзоре многочисленных работ, посвященных данной теме, сошлемся лишь на некоторые из них (Coushman-Rozin et al., 1985; Rogers, 1989; Rogers, Schief, 1989; Rubino, Dotsenko, 2006; Young, 1986; Жарницкий, 1992), где найдены и проанализированы различные точные частные решения, исследована их устойчивость (Coushman-Rozin, 1986; Ripa, 1987). Одно из этих решений, получившее название «родон» (Coushman-Rozin, 1987), соответствует равномерному вращению эллиптического ринга как твердого тела вокруг вертикальной оси, второе – пульсон (Coushman-Rozin et al., 1985; Жарницкий, 1990; Зацепя, Галушко, 2009) – соответствует динамике осесимметричного ринга или линзы. Наконец, третий класс точных частных решений соответствует пульсродону, который представляет собой деформирующийся в процессе движения эллиптический ринг с теплым ядром, вращающийся с зависящей от времени угловой скоростью (Rogers, 1989; Rogers, Schief, 1989; Жарницкий, 1992).

К ряду перечисленных выше работ следует отнести важную статью (Ball, 1963), которая стала в некотором роде классической, поскольку во всех последующих публикациях, связанных с моделированием рингов и линз, авторы ссылаются на ее важные результаты. В этой работе автор исследовал в приближении мелкой воды приливные колебания в бассейне, представляющем собой эллиптический параболоид, и получил результаты, которые в полной мере приложимы к физическим явлениям, моделируемым уравнениями (1.1–1.3).

Следует отметить, что названия «пульсон», «родон» и «пульсродон» были введены авторами для обозначения соответствующих решений уравнений, описывающих модели рингов с теплым ядром. Вместе с тем, уравнениями (1.1–1.3) описываются не только геофизические объекты типа ринга или глубоководной линзы, но также некоторые газодинамические и магнитогазодинамические явления (Rogers, Schief, 1989). Поэтому естественно аналогичные решения данной системы именовать этими же терминами.

В настоящей работе поставим задачу, описывающую динамику эллиптического вихря, для определенности – линзы, и найдем ее общее аналитическое решение, как нам представляется, в простых и понятных физических терминах, а также исследуем решение в зависимости от параметров задачи и начальных условий.

Работа состоит из нескольких разделов. Во втором разделе рассматриваются уравнения движения линзы в подвижной системе координат, связанной с центром масс и главными осями эллиптического вихря, которые редуцируются к системе семи обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и функциональному соотношению. В третьем разделе излагается получение решения задачи, а его исследование проводится в следующем – четвертом разделе. В пятом разделе приводится приближенное решение нелинейного уравнения для одной из степеней свободы. Шестой раздел посвящен рассмотрению некоторых частных решений, в том числе ранее не известных, вытекающих из общего решения. В седьмом разделе рассматриваются особенности решения в предельном случае. В заключительном разделе сформулированы основные выводы работы.

2. Постановка задачи

Исходными уравнениями, описывающими движение эллиптической вихревой линзы в идеализированной постановке, являются уравнения (1.1–1.3).

Рассмотрим новую подвижную систему координат $K(x, y)$, в которой уравнение толщины линзы (1.2) представляется в каноническом виде:

$$\begin{aligned} h = h_0 + AX^2 + 2BXY + CY^2 &= h_0 \left(1 - (X \cos \theta + Y \sin \theta)^2 / a^2 - (-X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 / b^2 \right) = \\ &= h_0 \left(1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2 \right). \end{aligned}$$

Здесь $a(t), b(t)$ – полуоси эллипса при $h(x, y, t) = 0$, $\theta(t)$ – соответствующий угол поворота системы координат. Поскольку для описания движения линзы используются уравнения мелкой воды, то предполагается, что линза является тонкой, и значит ее вертикальные размеры существенно меньше горизонтальных $h_0(t) \ll a, b$.

В новой системе координат уравнения (1.1–1.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - (f + 2\omega)v - x \left[(f/2 + \omega)^2 - f^2/4 \right] - \dot{\omega}y &= -\tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + (f + 2\omega)u - y \left[(f/2 + \omega)^2 - f^2/4 \right] + \dot{\omega}x &= -\tilde{g} \frac{\partial h}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{dh}{dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad h = h_0 \left(1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2 \right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial(\)}{\partial t} + u \frac{\partial(\)}{\partial x} + v \frac{\partial(\)}{\partial y},$$

где $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.

Область определения системы $S(t)$ представляет собой эллипс:

$$S = \{(x, y), \quad x^2 / a^2 + y^2 / b^2 \leq 1\}.$$

Подставляя компоненты скорости $u = u_1x + u_2y$, $v = v_1x + v_2y$ и выражение $h = h_0(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$ в систему (2.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , y , получим семь обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и одно функциональное соотношение:

$$\dot{u}_1 + u_1^2 + v_1u_2 - (f + 2\omega)v_1 - (\omega + f)\omega = 2\tilde{g}h_0 / a^2, \quad (2.2a)$$

$$\dot{u}_2 + u_1u_2 + v_2u_2 - (f + 2\omega)v_2 - \dot{\omega} = 0, \quad (2.2b)$$

$$\dot{v}_1 + u_1v_1 + v_1v_2 + (f + 2\omega)u_1 + \dot{\omega} = 0, \quad (2.2c)$$

$$\dot{v}_2 + v_1u_2 + v_2^2 + (f + 2\omega)u_2 - (\omega + f)\omega = 2\tilde{g}h_0 / b^2, \quad (2.2d)$$

$$\dot{h}_0 / h_0 + (u_1 + v_2) = 0, \quad u_1 = \dot{a} / a, \quad v_2 = \dot{b} / b, \quad u_2 / a^2 = -v_1 / b^2 \quad (2.2e)$$

для восьми неизвестных функций u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , a , b , h_0 , ω .

Уравнения (2.2e) определяют первый интеграл $h_0ab = \text{const} = V_0$, соответствующий сохранению объема линзы, и позволяют ввести новую функцию $\varpi(t)$:

$$u_2 = -\varpi a / b, \quad v_1 = \varpi b / a. \quad (2.3)$$

Определенная таким образом функция $\varpi(t)$ связана с вихрем поля скорости $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v_1 - u_2 = \varpi(b/a + a/b)$, который является одинаковым в данный момент для всех точек линзы. Величина $\Omega_z = \varpi(b/a + a/b)/2$ представляет мгновенную угловую скорость жидкого элементарного объема при мгновенном его затвердевании.

Подставим теперь составляющие компонентов скоростей u_1 , u_2 , v_1 , v_2 из (2.2e–2.3) в уравнения (2.2a–e):

$$\ddot{a} - \varpi^2 a - (f + 2\omega)\varpi b - (\omega + f)\omega a = \tilde{g} \frac{2V_0}{a^2 b}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{b} - \varpi^2 b - (f + 2\omega)\varpi a - (\omega + f)\omega b = \tilde{g} \frac{2V_0}{ab^2},$$

$$\varpi a + 2\varpi \dot{a} + (f + 2\omega)\dot{b} + \dot{\omega} b = 0, \quad (2.5)$$

$$\varpi b + 2\varpi \dot{b} + (f + 2\omega)\dot{a} + \dot{\omega} a = 0.$$

В результате получили систему уравнений шестого порядка для искомым функций a , b , ϖ , ω , через которые выражаются остальные:

$$u_1 = \dot{a}/a, \quad u_2 = -\varpi a/b, \quad v_1 = \varpi b/a, \quad v_2 = \dot{b}/b, \quad h_0 = V_0/(ab). \quad (2.6)$$

Для окончательной постановки задачи сформулируем самые общие начальные условия ($t = 0$):

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad \dot{a} = \dot{a}_0, \quad \dot{b} = \dot{b}_0, \quad \varpi = \varpi_0, \quad \omega = \omega_0, \quad h_0 = D,$$

которые не являются независимыми в силу существования первых интегралов системы 2.4–2.5.

Для дальнейшего изложения удобно перейти к безразмерным параметрам. С этой целью выберем в качестве определяющего масштаба длины начальное значение большей полуоси эллипса, считая ее равной a_0 , а времени – обратную величину параметра Кориолиса f , и определим масштабирование следующим образом:

$$t = \tau/f, \quad (\varpi, \omega) = f(\tilde{\varpi}, \tilde{\omega}), \quad a = a_0\tilde{a}, \quad b = a_0\tilde{b}, \quad \dot{a}_0 = fa_0\alpha, \quad \dot{b}_0 = fa_0\beta, \\ h_0 = D/(\tilde{a}\tilde{b}), \quad \lambda = b_0/a_0, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

где $(\tilde{\varpi}, \tilde{\omega})$, (\tilde{a}, \tilde{b}) , (α, β) – соответственно безразмерные угловые скорости, полуоси эллипса и начальные скорости изменения полуосей.

Далее все выкладки осуществляются с безразмерными функциями и параметрами, поэтому тильду над переменными опустим.

Уравнения (2.4) и (2.5) в безразмерной форме принимают вид:

$$\ddot{a} - \varpi^2 a - (1 + 2\omega)\varpi b - (1 + \omega)\omega a = 2F\lambda/(a^2 b), \\ \ddot{b} - \varpi^2 b - (1 + 2\omega)\varpi a - (1 + \omega)\omega b = -2F\lambda/(ab^2), \quad (2.7)$$

$$\varpi a + 2\varpi\dot{a} + (1 + 2\omega)\dot{b} + \dot{\omega}b = 0, \\ \varpi b + 2\varpi\dot{b} + (1 + 2\omega)\dot{a} + \dot{\omega}a = 0. \quad (2.8)$$

Введенный безразмерный параметр $F = \tilde{g}D/(fa_0)^2 = R_a^2/a_0^2$ представляет отношение квадратов радиуса деформации Россби $R_a = \sqrt{\tilde{g}D}/f$ к характерному горизонтальному размеру линзы a_0 . Остальные обозначения ясны из контекста.

Динамическую систему, описываемую уравнениями (2.7–2.8), вместе с начальными условиями:

$$a = 1, \quad b = \lambda, \quad \dot{a} = \alpha, \quad \dot{b} = \beta, \quad \varpi = \varpi_0, \quad \omega = \omega_0, \quad h_0 = 1 \quad (2.9)$$

для краткости будем обозначать (a, τ) .

3. Решение задачи

Складывая и вычитая уравнения в (2.7) и (2.8) и вводя новые функции: $p = (a + b)/2$, $q = (a - b)/2$, придем к следующей форме представления системы:

$$\begin{aligned} \ddot{p} - \left[(\varpi + \omega + 1/2)^2 - 1/4 \right] p &= 2F\lambda p / (p^2 - q^2)^2, \\ \ddot{q} - \left[(\varpi - \omega - 1/2)^2 - 1/4 \right] q &= -2F\lambda q / (p^2 - q^2)^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(\varpi + \omega + 1/2) p^2 = c_p = const, \quad (\varpi - \omega - 1/2) q^2 = c_q = const. \quad (3.2)$$

Примечательно, что уравнения (2.8) дают два интеграла (3.2), второй из которых допускает интересные следствия.

1) Пусть $|c_q| \neq 0$. Тогда, если в начальный момент линза эллиптическая, то в процессе своего движения всегда будет оставаться эллиптической (ни в один из моментов движение не может стать круговым ($q = 0$) или полуось эллипса, являющаяся в начальный момент большей, остается таковой и в любой последующий момент времени; всегда $q > 0$ или $q < 0$).

2) $c_q = 0$. Данный случай допускает два режима. Первый представляет собой чисто круговое движение $q \equiv 0$, а второй ($\varpi - \omega - f/2 \equiv 0$) – определяет динамику линзы, допускающую смену знака функции $q(\tau)$. Это означает, что при переходе через ноль (круговое движение) большая полуось эллипса ($a > b$) становится меньшей ($a < b$) и наоборот.

Таким образом, решения в первом и втором случаях качественно отличаются друг от друга и, следовательно, нет непрерывной зависимости решений задачи при переходе параметра c_q через ноль от положительного значения к отрицательному и наоборот.

На основе данных следствий построим область $\mathbb{F}(p, q)$ двумерной плоскости (p, q) , в которой расположены траектории изображающей точки $M(p(\tau), q(\tau)) \in \mathbb{F}(p, q)$ решения системы уравнений (3.1–3.2).

При $|c_q| > 0$, когда величина q не может принимать нулевые значения, область $0 < |q| < p$ (сумма полуосей эллипса всегда больше их разности) распадается на две подобласти: $0 < q < p$ при $q_0 > 0$ и $0 < -q < p$ при $q_0 < 0$. В зависимости от начального значения q_0 движение изображающей точки $M(p(\tau), q(\tau))$ происходит в первой или второй подобластях.

Поскольку уравнения (3.1) не изменяются при замене q на $-q$, то для дальнейшего анализа достаточно ограничиться рассмотрением лишь верхней полуплоскости $q_0 > 0$ ($a_0 > b_0$, $\lambda > 0$). Уравнения движения, соответствующие данному случаю, принимают вид:

$$\ddot{p} - \left(\frac{c_p^2}{p^4} - 1/4 \right) p = \frac{2F\lambda}{(p^2 - q^2)^2} p, \quad \ddot{q} - \left(\frac{c_q^2}{q^4} - 1/4 \right) q = -\frac{2F\lambda}{(p^2 - q^2)^2} q. \quad (3.3)$$

Во втором случае $c_q = 0$: $0 \leq |q| < p$, поэтому траектории находятся внутри сектора, ограниченного лучами $q = p$ и $q = -p$, а уравнения, описывающие движение изображающей точки, получаются из (3.3) при $c_q = 0$.

Собирая все неравенства в единую систему, получим:

$$\mathbb{F}(p, q) = \left\{ \begin{array}{l} 0 < q < p \quad \text{при} \quad |c_q| > 0, \quad q_0 > 0, \\ 0 \leq |q| < p \quad \text{при} \quad c_q = 0 \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

В дальнейшем будем неоднократно прибегать к рассмотрению данной области или ее образа, получаемого в результате преобразований переменных, а также ее подмножеств, определяемых конкретным выбором параметров задачи.

Таким образом, в результате перехода к новым функциям (p, q) , динамическая (a, τ) -система, описываемая дифференциальными уравнениями шестого порядка, редуцировалась к двум функциональным соотношениям (3.2) и к системе четвертого порядка (3.3) с начальными условиями, вытекающими из (2.9):

$$p_0 = (1 + \lambda)/2, \quad q_0 = (1 - \lambda)/2, \quad \dot{p}_0 = (\alpha + \beta)/2, \quad \dot{q}_0 = (\alpha - \beta)/2, \quad (3.5)$$

которую будем называть (p, τ) -системой.

Решение данной системы зависит от шести параметров $c_p, c_q, F, \lambda, \alpha, \beta$, последние три из которых связаны с начальными условиями, а первые три являются внешними для данной задачи. При этом внешние параметры c_p, c_q, F не являются произвольными, а принадлежат некоторой области в параметрическом пространстве, для которой существует решение уравнений (3.3).

Система уравнений (3.3) допускает два первых интеграла. Первый представляет собой интеграл энергии:

$$\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + c_p^2 / p^2 + c_q^2 / q^2 + (p^2 + q^2) / 4 + 2F\lambda / (p^2 - q^2) = 2E_p, \quad (3.6)$$

второй – интеграл Болла (Ball, 1963) для момента инерции:

$$(p^2 + q^2)'^2 / 2 + (p^2 + q^2)^2 / 2 = 4E_p(p^2 + q^2) - c_I, \quad (3.7)$$

где c_I – константа интегрирования.

Данный интеграл следует из уравнения Болла, которое легко получить, если первое уравнение (3.3) умножить на p , второе – на q и сложить вместе с (3.6):

$$(p^2 + q^2)'' + (p^2 + q^2) = 4E_p. \quad (3.8)$$

Момент инерции линзы относительно вертикальной оси определяется в виде интеграла $I = \int h(x^2 + y^2) ds$, вычисление которого в безразмерных величинах дает $I / (V_0 a_0^2) = \pi \int_0^s (p^2 + q^2) / 6 = \pi (a^2 + b^2) / 12$ и, следовательно, момент инерции с точностью до постоянного множителя совпадает с величиной $p^2 + q^2$, входящей в уравнения (3.7–8).

Решение уравнения Болла представим в виде:

$$\delta^2 = p^2 + q^2 = 4(E_p + A \cos(\tau - \phi)), \quad (3.9)$$

где амплитуда колебаний $A \geq 0$ и фаза ϕ определяются через начальные условия. При этом должно выполняться условие $E_p > A$.

Константу c_l в интеграле Болла находим прямой подстановкой решения в уравнение (3.7): $c_l = 8(E_p^2 - A^2)$. Из предшествующего условия следует ее положительность, поэтому, в том числе для удобства, введем новую константу $S^2 = c_l / 8$ так, что $S^2 = E_p^2 - A^2$.

Полученное решение (3.9) накладывает ограничения на область изображающих точек (3.4), вследствие чего новая область $\mathbb{F}_\delta(p, q) \subset \mathbb{F}(p, q)$ представляется в виде:

$$\mathbb{F}_\delta(p, q) = \left\{ \begin{array}{l} 0 < 4(E_p - A) = \delta_{\min}^2 \leq p^2 + q^2 \leq \delta_{\max}^2 = 4(E_p + A), \\ 0 < q < p \quad \text{при } q_0 > 0, \quad |c_q| > 0, \\ 0 \leq |q| < p \quad \text{при } c_q = 0 \end{array} \right\}, \quad (3.10)$$

графическое изображение которой иллюстрирует рисунок 1.

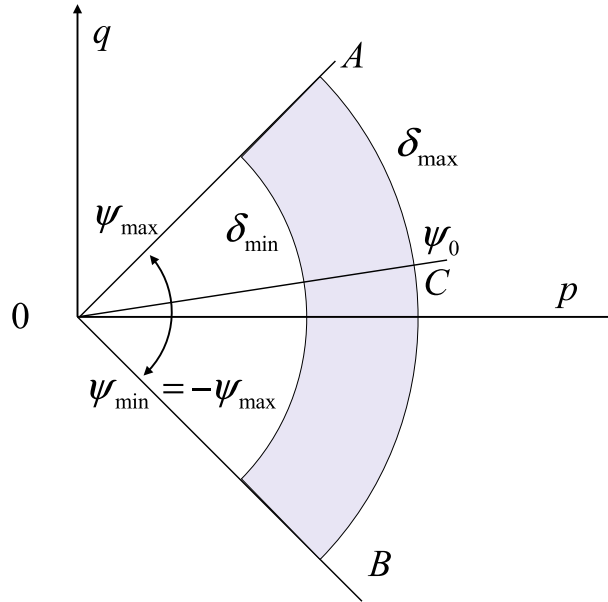


Рис. 1 – Область движения изображающей точки $M(p, q)$ решения динамической системы (p, τ)

При конкретном выборе точки $Z(c_p, c_q, F, \lambda, \alpha, \beta)$ параметрического пространства задачи $(c_p, c_q, F, \lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$, траектории изображающей точки M лежат внутри замкнутого множества, являющегося при $|c_q| > 0$ и $\lambda > 0$ пересечением сектора $0 < \psi_0 \leq \psi \leq \psi_{\max} < \pi/4$ (АОС), а при $|c_q| = 0$ сектора $-\pi/4 < -\psi_{\max} \leq \psi \leq \psi_{\max} < \pi/4$ (АОВ) с кольцом $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$.

Выразим решение (3.9) через начальные условия (3.5):

$$\delta^2 = 4 \left[E_p + \left((1 + \lambda^2) / 8 - E_p \right) \cos \tau + \left((\alpha + \lambda\beta) / 4 \right) \sin \tau \right], \quad (3.11)$$

амплитуда колебаний которого равна:

$$A = \sqrt{\left((1 + \lambda^2) / 8 - E_p \right)^2 + (\alpha + \lambda\beta)^2 / 16}. \quad (3.12)$$

Если амплитуда A при соответствующем выборе параметров $(E_p = E_0 = (1 + \lambda^2) / 8, \alpha = -\lambda\beta)$ обращается в ноль, тогда область движения изображающей точки представляет собой дугу окружности с радиусом $\delta = \delta_{\max} = \delta_{\min} = 2\sqrt{E_p}$.

С другой стороны, амплитуда, оставаясь по величине меньше энергии E_p , не может сколь угодно близко приближаться к ней, поскольку в противном случае это означало бы уменьшение момента инерции линзы δ^2 при постоянном объеме и соответственно – увеличение толщины линзы. Это, в свою очередь, привело бы к нарушению исходных предположений задачи о тонкости линзы ($h_0 \ll a, b$) и правомерности использования уравнений мелкой воды. Следовательно, область (3.10) должна быть ограничена по радиусу снизу величиной δ_* : $(0 < \delta_* \leq \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max})$, при которой справедливо использование уравнений мелкой воды. В дальнейшем, имея это в виду, не будем, однако, усложнять запись ограничений на величину δ .

В силу круговой симметрии области (3.10) естественным является переход к новым функциям:

$$p = \delta \cos \psi, \quad q = \delta \sin \psi, \quad (3.13)$$

в результате чего в силу условий $p > 0, p^2 - q^2 = \delta^2 \cos 2\psi > 0$ область $\mathbb{F}_\delta(p, q)$ преобразуется в:

$$\mathbb{F}_\psi(\delta, \psi) = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}, \\ 0 < \psi_0 \leq \psi \leq \psi_{\max} < \pi / 4, \quad |c_q| > 0; \\ -\pi / 4 < -\psi_{\max} \leq \psi \leq \psi_{\max} < \pi / 4, \quad c_q = 0 \end{array} \right\},$$

а интеграл энергии (3.3) в уравнение:

$$\delta^4 \psi'^2 + \frac{2c_p^2}{(1 + \cos 2\psi)} + \frac{2c_q^2}{(1 - \cos 2\psi)} + \frac{2F\lambda}{\cos 2\psi} = - \left(\delta^2 \delta'^2 + \frac{1}{4} \delta^4 - 2E_p \delta^2 \right) = 4S^2,$$

из которого видно, что правая его часть в силу решения уравнения Болла (3.9) равна константе.

Вводя новое время $T(\tau)$ (время Болла) и новые параметры (x_*, ξ, η) :

$$T(\tau) = 4S \int_0^\tau \frac{ds}{\delta^2(s)}, \quad \frac{d}{dT} = \frac{\delta^2}{4S} \frac{d}{d\tau}, \quad x_* = F\lambda / 2S^2, \quad \xi = c_p^2 / 2S^2, \quad \eta = c_q^2 / 2S^2, \quad (3.14)$$

получим уравнение:

$$4\left(\frac{d\psi}{dT}\right)^2 = \left(\frac{d \cos 2\psi}{dT}\right)^2 \frac{1}{(1 - \cos^2 2\psi)} = 1 - \frac{\xi}{(1 + \cos 2\psi)} - \frac{\eta}{(1 - \cos 2\psi)} - \frac{x_*}{\cos 2\psi}, \quad (3.15)$$

которое сводится к квадратурам.

Таким образом, наличие интеграла Болла (3.7) или уравнения Болла (3.8), а также переход к функциям (3.13), позволили свести описание динамической системы (3.1) к одному дифференциальному уравнению первого порядка (3.15) и решению (3.9), каждое из которых описывает свою степень свободы (δ, ψ) .

Сделав очередную подстановку $x = \cos 2\psi$ ($0 < x \leq 1$), упростим последнее уравнение:

$$\left(\frac{dx}{dT}\right)^2 = \frac{1}{x}(x - x_*)(1 - x^2) - \xi(1 - x) - \eta(1 + x), \quad (3.16)$$

позволяющее получить решение в виде интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{[(x - x_*)(1 - x^2) - \xi(1 - x) - \eta(1 + x)]x}} = \pm T + C, \quad (3.17)$$

в общем случае – эллиптического 3-го рода.

Данное решение справедливо также для режима $c_q = 0 = \eta$, в котором (и только в этом режиме) величина x может достигать единицы.

Уравнение движения, соответствующее уравнению энергии (3.16), имеет вид:

$$x'' + x(1 - x_*/2x^3) = (\xi - \eta + x_*)/2, \quad 0 < x \leq 1, \quad (3.18)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по новому времени (в дальнейшем дифференцирование по τ будем обозначать точкой, а по T – штрихом).

Начальные условия для данного уравнения найдем из определения переменной x и ее производной:

$$p^2 - q^2 = \delta^2 x, \quad 2(pp' - qq') = 2\delta\dot{\delta}x + \delta^2\dot{x} = 2\delta\dot{\delta}x + 4Sx',$$

подставляя в которые начальные условия из (3.5) и (3.11) получим:

$$x_0 = \frac{2\lambda}{(1 + \lambda^2)}, \quad x'_0 = \frac{(1 - \lambda^2)}{4S(1 + \lambda^2)}(\beta - \lambda\alpha). \quad (3.19)$$

Уравнение (3.18) вместе с начальными условиями (3.19) определяет динамическую систему (x, T) на интервале $0 < x \leq 1$, зависящую от внешних параметров $\xi, \eta, x_*, \lambda, \alpha, \beta$.

Предполагая, что решение данного уравнения $x(T)$ известно, выпишем все искомые функции задачи, определяющие динамику пульсродона:

$$\begin{aligned}
 p(\tau) &= \delta(\tau)\sqrt{(1+x)/2}, \quad q(\tau) = \pm\delta(\tau)\sqrt{(1-x)/2}, \\
 a(\tau) &= \delta(\tau)\left(\sqrt{(1+x)/2} \pm \sqrt{(1-x)/2}\right), \quad b(\tau) = \delta(\tau)\left(\sqrt{(1+x)/2} \mp \sqrt{(1-x)/2}\right), \\
 \varpi(\tau) &= (c_p/(1+x) + c_q/(1-x))/\delta^2(\tau), \quad \omega(\tau) = -1/2 + (c_p/(1+x) - c_q/(1-x))/\delta^2(\tau), \\
 \delta^2(\tau) &= 4\{E_p + (E_0 - E_p)\cos\tau + (\alpha + \lambda\beta)/4\sin\tau\} = 4E_p(1 + A\cos(\tau - \phi)), \\
 T(\tau) &= 2\left\{\arctg\left(\frac{\sqrt{1-A}\operatorname{tg}\frac{(\tau-\phi)}{2}}{\sqrt{1+A}}\right) + \arctg\left(\frac{\sqrt{1-A}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{\sqrt{1+A}}\right)\right\} + 2\pi k, \\
 k &= \operatorname{Entier}\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau-\phi}{2\pi}\right) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\tau-\phi}{2\pi}\right], \quad \sin\phi = (\alpha + \lambda\beta)/(4A), \quad A = \lambda E_p.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

4. Исследование решения

Несмотря на то, что решение (3.17) не представляется в общем виде через элементарные функции, все его свойства и особенности могут быть выявлены из уравнения энергии (3.16), преобразованного к виду:

$$x'^2/2 + \left[x^2 - (\xi - \eta + x_*)x + x_*/x + \xi + \eta\right]/2 = 1/2, \quad K + \Pi = E_x, \tag{4.1}$$

в котором слагаемые в левой части являются соответственно кинетической K и потенциальной Π энергиями, а в правой – полной энергией E_x динамической системы. Фактически, данное уравнение описывает на фазовой плоскости (x', x) конкретную траекторию точки $(x'(T), x(T))$, соответствующую энергии $E_x = 1/2$.

Из выражения для потенциальной энергии (4.1) видно, что она представляет собой классическую «яму», ограниченную с левой стороны ниспадающей ветвью функции $x_*/(2x)$, а с правой – параболой $x^2/2$.

Из качественных соображений ясно, что в области существования решения происходит колебательный процесс в потенциальной «яме» между корнями уравнения, определяемого условиями $\Pi = 1/2$, $0 < x \leq 1$. В случае совпадения корней, система переходит в стационарное состояние.

Исследуем корни уравнения $\Pi = 1/2$, приводя его к виду:

$$Y_l(x) = (x - x_*)(1 - x^2)/x = -(\xi - \eta)x + \xi + \eta = Y_r(x). \tag{4.2}$$

Уравнение в общем случае имеет либо один корень, либо три. При этом один из корней всегда отрицательный, а два другие, если существуют, – положительные. Действительно, левая функция $Y_l(x)$ уравнения (4.2) в области $x > 0$ (рисунок 2) представляет собой выпуклую форму с ветвями, направленными в сторону отрицательных значений. При этом существует два корня: $x = 1$, и $x = x_*$, между которыми функция является положительной.

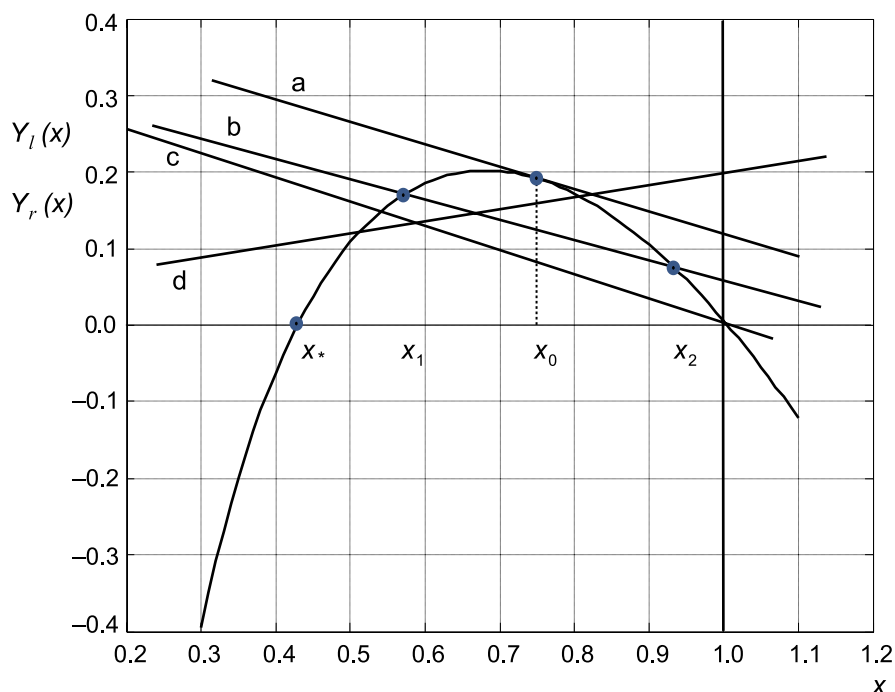


Рис. 2 – Качественное представление функций $Y_l(x)$, $Y_r(x)$, $x > 0$

В области отрицательных значений x функция $Y_l(x)$ является монотонно возрастающей, пересекает ось x при $x = -1$ и приближается к вертикальной асимптоте ($x = 0$). Правая функция $Y_r(x)$ – линейная, поэтому для существования двух корней уравнения (4.2) на интервале $0 < x \leq 1$ необходимо, чтобы линейная функция $Y_r(x)$ пересекала бы (рисунок 2, прямые b–d) или касалась (рисунок 2, прямая a, двойной корень – стационарная точка) функции $Y_l(x)$. Это условие обеспечивается неравенством, вытекающим из (3.16):

$$(1 - x^2)(x - x_*) / x \geq \xi(1 - x) + \eta(1 + x),$$

которое определяет необходимое условие существования решения на интервале $0 < x \leq 1$.

Пусть уравнение (4.2) имеет корни: $x_3 < 0 < x_1, x_2 \leq 1$. Тогда его можно привести к виду:

$$-x^3 + (x_* + (\xi - \eta))x^2 + (1 - (\xi + \eta))x - x_* = (x - x_3)(x - x_1)(x_2 - x).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x левой и правой частей, найдем:

$$x_3 = -x_* / (x_2 x_1), \quad \xi + \eta - 1 = x_2 x_1 - x_* (x_1 + x_2) / (x_2 x_1), \quad \xi - \eta = x_1 - x_* + x_2 - x_* / (x_2 x_1),$$

и далее:

$$x_3 = -x_* / (x_2 x_1), \quad \xi = (1 + x_2)(1 + x_1)(1 + x_3) / 2, \quad \eta = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) / 2. \quad (4.3)$$

Поскольку в силу определения (3.13) $\xi \geq 0$, то из второго равенства следует $-1 \leq x_3 < 0$ или $x_2 x_1 \geq x_*$, а с учетом $x_2, x_1 \leq 1 : x_* \leq x_1, x_2$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (4.1) является наличие трех корней уравнения (4.2):

$$-1 \leq x_3 < 0 < x_* \leq x_1, x_2 \leq 1, \quad x_3 = -x_* / (x_1 x_2).$$

Последние условия налагают соответствующие ограничения на выбор параметров ξ, η при заданном x_* . Для их оценки рассмотрим все прямые линии $Y_r = -(\xi - \eta)x + \xi + \eta$, пересекающие кривую $Y_l(x) = (x - x_*)(1 - x^2)/x$ или касающиеся ее в области $x_* \leq x \leq 1$ таким образом, чтобы выполнялось условие $-1 \leq x_3 < 0$. При этом тангенс угла наклона прямой принимает максимальное значение, если прямая проходит через точку $x = -1$, $Y_r(-1) = 0$ и касается кривой Y_l , и минимальное, если касается Y_l в точке $x = 1$.

В первом случае $x_3 = -x_* / (x_2 x_1) = -1$, $x_1 = x_2$, $\xi = 0$ и, следовательно, $x_1 = \sqrt{x_*}$, а тангенс угла наклона равен $(1 - \sqrt{x_*})^2$. Во втором: $-x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -x_*$, $\eta = 0$ и $Y_r'(1) = -2(1 - x_*)$. Данные результаты позволяют получить неравенства $0 \leq \xi \leq 2(1 - x_*)$, $0 \leq \eta \leq 2(1 - \sqrt{x_*})$, где $0 < x_* \leq 1$.

Для дальнейшего исследования решений уравнения (4.1, 3.20) и системы в целом (3.1) необходимо более подробно остановиться на анализе параметрического пространства задачи.

Обозначим через $P = \{c_p, c_q, F, \lambda, \alpha, \beta\}$ множество параметров, при которых система имеет решение. Единственным среди них является параметр λ , для которого, в силу его определения, известна область изменения: $0 < \lambda \leq 1$. Для параметра F можно получить оценку из данных наблюдений ($10^{-3} \leq F \leq 10^{-1}$). Для остальных же параметров выбор значений не является простым, поскольку, во-первых, неизвестны их пределы изменения, а во-вторых, они не являются независимыми, а связаны ограничениями, определяемыми интегралами. В свою очередь выбор констант интегралов также не является произвольным. В связи с этим введем более удобные, на наш взгляд, параметры, через которые определяются остальные и для которых определены области их изменений.

Сначала рассмотрим интегралы энергии (3.6) и Болла (3.7), выраженные через начальные условия (3.5) (обозначив $E_0 = (1 + \lambda^2)/8$):

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2)/2 + 4c_p^2/(1 + \lambda)^2 + 4c_q^2/(1 - \lambda)^2 + E_0 + 2F &= 2E_p, \\ (\alpha + \lambda\beta)^2/16 &= E_0(2E_p - E_0) - S^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Данные уравнения налагают ограничения на параметры:

$$E_p \geq E_0/2 + F, \quad 2E_0(E_p - E_0/2) \geq S^2.$$

Используя введенный выше параметр A ($0 \leq A < 1$): $A = \lambda E_p$, $S^2 = E_p^2(1 - A^2)$, приведем второе уравнение (4.4) к виду:

$$(1 - A^2) E_0^2 (E_p / E_0 - 1 / (1 + A)) (1 / (1 - A) - E_p / E_0) = (\alpha + \lambda \beta)^2 / 16. \quad (4.5)$$

Поскольку левая часть уравнения должна быть неотрицательной, то относительная энергия должна изменяться в пределах $1 / (1 + A) \leq E_p / E_0 \leq 1 / (1 - A)$. Поэтому можно ввести очередной параметр μ_E ($0 \leq \mu_E \leq 1$), с помощью которого энергия представляется в форме:

$$E_p / E_0 = (1 + 2\mu_E A / (1 - A)) / (1 + A), \quad (4.6)$$

а уравнение (4.5) как:

$$(\alpha + \lambda \beta) = \pm (1 + \lambda^2) A \sqrt{\mu_E (1 - \mu_E)} / \sqrt{(1 - A^2)}.$$

Формула (4.6) фактически является решением задачи, определяющей, какой может быть относительная энергия при заданной относительной амплитуде $A = A / E_p$, чтобы синусоида $S_s = E_p + A \cos(\tau - \phi)$, оставаясь положительной, пересекала уровень E_0 .

Не нарушая общности, выберем в качестве начальных условий изображающую точку $M_x(\delta_0, x_0) \in \mathbb{F}_x(\delta, x)$ на границе области $x_0 = x_1$, которая в результате последовательных преобразований $(p, q) \rightarrow (\delta, \psi) \rightarrow (\delta, x)$ принимает вид:

$$\mathbb{F}_x(\delta, x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \delta_{\min}(\lambda, A, \mu_E) \leq \delta \leq \delta_{\max}(\lambda, A, \mu_E), \quad 0 \leq A < 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x_* \leq x_1 \leq x \leq 1, \quad c_q = 0 = \eta, \\ 0 < x_* \leq x_1 \leq x \leq x_2 < 1, \quad c_q \neq 0, \end{array} \right. \quad x_1 x_2 \geq x_* \end{array} \right\}. \quad (4.7)$$

Изображающая точка $(\delta(\tau), x(T(\tau)))$, таким образом, движется в пределах прямоугольника $(x_1, x_2, \delta_{\min}, \delta_{\max})$, достигая последовательно его сторон, гладко их касаясь.

В случае $x_0 = x_1$

$$x_0 = 2\lambda / (1 + \lambda^2) = x_1, \quad x'_0 = (1 - \lambda^2)(\beta - \lambda\alpha) / [S(1 + \lambda^2)] = x'_1 = 0 \quad (4.8)$$

и, следовательно:

$$\lambda\alpha = \beta, \quad \alpha(\lambda, \mu_E) = \pm \lambda \sqrt{\mu_E (1 - \mu_E)} / \sqrt{(1 - A^2)}.$$

Таким образом, три параметра (λ, A, μ_E) определяют все характеристики (E_p, S, α, β) , связанные с первой степенью свободы δ .

Далее будем считать, что корни уравнения (4.2), удовлетворяющие условиям (4.7), а также величина x_* – известны. Тогда вместо параметров $(c_p, c_q, F, \lambda, \lambda\alpha = \beta)$ рассмотрим новые, из которых непрерывным преобразованием можно получить первые.

Предположим, что параметры (λ, A, μ_E) выбраны. Тогда определено начальное условие $x_0 = 2\lambda / (1 + \lambda^2)$ (4.8) и, следовательно, наименьший корень x_1 . Теперь

можно выбрать значение параметра x_* в интервале $0 < x_* \leq x_1 = x_0(\lambda)$ и второй корень x_2 , параметризовав его на основе ограничений (4.7):

$$x_2(x_*, x_1, \mu_x) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_* / x_1 + \mu_x (1 - x_* / x_1), \quad x_* \leq x_1 \leq \sqrt{x_*}, \quad 0 \leq \mu_x < 1, \\ x_1 + \mu_x (1 - x_1), \quad \sqrt{x_*} \leq x_1 < 1, \quad 0 \leq \mu_x < 1 \end{array} \right\}, \quad |c_q| > 0, \\ \left. \begin{array}{l} x_1 + \mu_x (1 - x_1), \quad x_* \leq x_1 \leq 1, \quad \mu_x = 1, \quad c_q = 0 \end{array} \right\}. \quad (4.9)$$

В результате, задавая последовательно λ , x_* , μ_x , найдем из (4.3) параметры ξ, η , связанные со второй степенью свободы x , а из (3.14) и все остальные – c_p, c_q, F .

Таким образом, в параметрическом пространстве $\{\lambda, \Lambda, \mu_E, x_*, \mu_x\}$ построено множество:

$$P_x(\lambda, \Lambda, \mu_E, x_*, \mu_x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \lambda \leq 1, \quad 0 \leq \Lambda < 1, \quad 0 \leq \mu_E \leq 1, \\ 0 < x_* \leq 2\lambda / (1 + \lambda^2), \quad 0 \leq \mu_x \leq 1 \end{array} \right\}, \quad (4.10)$$

в каждой точке которого существует решение задачи (3.1) и которое, в соответствии с выведенными выше преобразованиями, приводится к множеству $(c_p, c_q, \lambda, F, \lambda\alpha = \beta)$ исходных параметров задачи.

Необходимо отметить, что предложенный способ последовательного выбора параметров (4.10) является одним из простейших из многих возможных.

5. Приближенное решение уравнения (x, T) -системы

Для лучшего понимания внутренней структуры общего решения (3.20) найдем приближенное (качественное) решение уравнения (3.18). С этой целью обратимся к интегралу (3.17):

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{(x-x_3)}\sqrt{(x-x_1)}\sqrt{(x_2-x)}} = \pm T + C.$$

Качественно решение не изменится, если на интервале интегрирования заменим монотонно возрастающую функцию $\sqrt{x} / \sqrt{(x-x_3)}$ постоянным значением, например:

$$\sqrt{x} / \sqrt{(x-x_3)} \rightarrow \left(\sqrt{x_1} / \sqrt{(x_2-x_3)} + \sqrt{x_2} / \sqrt{(x_2-x_3)} \right) / 2 = 1 / \sigma. \quad (5.1)$$

В таком упрощении фактически осуществляется аппроксимация (в некотором смысле близости) функции $(x-x_3)(x-x_1)(x_2-x)/x$ на интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ параболой $-\sigma^2(x-x_1)(x_2-x)$. Данная аппроксимация тем точнее, чем уже интервал (x_1, x_2) . Тогда интеграл вычисляется в конечных функциях и дает решение: $x = (x_2 + x_1) / 2 + L \cos(\sigma T + \varphi)$, где L, φ – константы интегрирования.

Подставляя начальные условия (3.19): $x_0 = x_1$, $x'_0 = 0$, находим решения:

$$\begin{aligned} x &= (x_2 + x_1)/2 - ((x_2 - x_1)/2) \cos \sigma T, \quad x_1 = x_0 = 2\lambda / (1 + \lambda^2), \\ p &= \delta \sqrt{(1 + (x_2 + x_1)/2 - ((x_2 - x_1)/2) \cos \sigma T) / \sqrt{2}}, \\ q &= \delta \sqrt{(1 - (x_2 + x_1)/2 - ((x_2 - x_1)/2) \cos \sigma T) / \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

где $\delta^2(\tau) = 4E_p (1 + A \cos(\tau - \phi))$.

Таким образом, решения системы (3.20) представляют собой квазипериодические процессы, определяемые двумя степенями свободы $(\delta(\tau)x(T))$, периодически колеблющимися в своем времени с периодами соответственно равными 2π и $2\pi/\sigma$, $(1 < \sigma < \sqrt{2})$.

6. Частные решения

Рассмотрим различные частные случаи, вытекающие из решения (3.20), которое в общем случае представляет собой пульсродон.

Изображающая точка $(\delta(\tau), x(\tau))$ любого решения, соответствующего некоторой точке $(\lambda, A, \mu_E, x_*, \mu_x)$ параметрического пространства, движется в замкнутой области (4.7), которая при определенном выборе параметров может вырождаться как в линию, так и в точку. Исходя из этого, рассмотрим частные решения задачи.

А) Стационарное состояние (p, τ) -системы

Рассмотрим простейшее решение, для которого область $\mathbb{F}_x(\delta, x)$ вырождается в точку $(\delta = \text{const} = \delta_0, x = \text{const} = x_0)$. Такое решение соответствует стационарному состоянию (p, τ) -системы (3.3, 3.5), достигаемому при $A = 0$ и $x_1 = x_2$. Данные условия, в свою очередь, определяют подмножество параметрического пространства, доставляющее стационарные решения:

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad 0 \leq \mu_E \leq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad \mu_x = 0: \\ E_p &= E_0 = (1 + \lambda^2)/8 = S, \quad \alpha = \beta = 0, \quad \delta_0 = 2\sqrt{E_0} = \sqrt{(1 + \lambda^2)/2}, \\ x_0 &= 2\lambda / (1 + \lambda^2) = x_1 = x_2 \geq \sqrt{x_*}. \end{aligned}$$

Из соответствующих формул найдем производные параметры:

$$x_* = 8Fx_0^2 / \lambda, \quad c_p = \pm(1 + \lambda)^2 \sqrt{(1 - 8F/\lambda)} / 8, \quad c_q = \pm(1 - \lambda)^2 \sqrt{(1 + 8F/\lambda)} / 8, \quad F \leq \lambda/8$$

В результате решение (3.20) приводится к родону:

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 + \lambda)/2, \quad q_0 = (1 - \lambda)/2, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = \lambda, \quad r = 8F/\lambda, \\ \varpi &= \left(\pm\sqrt{(1-r)} \pm \sqrt{(1+r)} \right) / 4, \quad \omega = -1/2 + \left(\pm\sqrt{(1-r)} \mp \sqrt{(1+r)} \right) / 4, \\ u &= -\varpi / \lambda y, \quad v = \varpi \lambda x. \end{aligned}$$

Видно, что эллиптическая линза как твердое тело всегда вращается антициклонически. В то же время внутри линзы вращение жидкости может быть как циклоническим, так и антициклоническим, но обязательно отличным от нуля.

При $\lambda \rightarrow 1$ линза превращается в круговой вихрь. В этом случае вращающаяся с постоянной скоростью подвижная система координат теряет свою значимость и носит искусственный характер. Наблюдаемая угловая скорость вращения кругового вихря на f -плоскости будет равна $\Omega_0 = \bar{\omega}_0 + \omega_0 = -1/2 \pm \sqrt{1 - 8F}/4$.

Таким образом, в пространстве параметров $P_x = \{\lambda, \Lambda, \mu_E, x_*, \mu_x\}$ существует подмножество:

$$P_{rod} = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda = 0, \quad 0 \leq \mu_E \leq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1, \\ \sqrt{x_*} \leq 2\lambda(1 + \lambda^2), \quad \mu_x = 0. \end{array} \right\},$$

для каждой точки которого существует решение, соответствующее родону.

В) Пульсродон постоянной формы

Рассмотрим теперь решение, в котором изменяется одна степень свободы $\delta(\tau)$, а вторая $x(T)$ постоянна:

$$\mathbb{F}_x(\delta, x_0) = \{\delta_{\min} \leq \delta(\tau) \leq \delta_{\max}, \quad x = x_0 = x_1 = x_2 = const\}.$$

В этом случае область \mathbb{F}_x представляет собой отрезок, а соответствующее ей подмножество параметрического пространства $P_1 \subset P_x$ определяется неравенствами:

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \Lambda < 1, \quad 0 \leq \mu_E \leq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1, \\ \sqrt{x_*} \leq 2\lambda/(1 + \lambda), \quad \mu_x = 0. \end{array} \right\}.$$

Не выписывая формулы, заметим лишь, что данное решение представляет собой пульсродон, эллиптическая форма которого в процессе эволюции не изменяется, т.е. полуоси эллипса синфазно возрастают/убывают с одним и тем же коэффициентом подобия $-b/a = \lambda$. При этом, если устремить параметр $\lambda \rightarrow 1$, тогда $x_0 \rightarrow 1$ и пульсродон переходит в пульсон.

С) Пульсродон при $c_q = 0$

Данный случай заслуживает того, чтобы ему уделить особое внимание. Как отмечалось выше, пульсродон при $c_q = 0$ ($\mu_x = 1, x_2 = 1$) в процессе своей эволюции периодически меняет полуоси с большей на меньшую и наоборот и, таким образом, происходит переход из эллиптической формы линзы через круговое состояние в эллиптическую таким образом, что функция q меняет знак. В терминах введенного выше угла ψ ($q = \delta \sin \psi$) это означает, что начиная движение из точки x_1 ($\psi = \psi_1$) система проходит нулевое состояние ($\psi_2 = 0, x_2 = 1$), далее переходит в точку x_1 с фазой $\psi = \psi_2 = -\psi_1$ и затем повторяет путь в обратном направлении.

Таким образом, движение происходит в области $-\psi_1 \leq \psi \leq \psi_1$ и, следовательно, период его движения \bar{T} отличается, по крайней мере, в два раза от периода, соответствующего решению для случая $c_q \neq 0$ ($0 < \psi_2 < \psi_1$) при $\psi_2 \rightarrow 0$. При этом за период \bar{T} точка $x(T)$ пройдет дважды интервал $x_1 \leq x(T) \leq 1$.

Обобщая изложенное, представим решение $q(\tau, T(\tau))$ для различных интервалов времени T в виде:

$$q = \begin{cases} \delta \sqrt{(1-x(T))/2}, & n\bar{T} + \leq T \leq n\bar{T} + \bar{T}/4, & (x: x_1 \rightarrow 1); \\ -\delta \sqrt{(1-x(T))/2}, & n\bar{T} + \bar{T}/4 < T \leq n\bar{T} + \bar{T}/2, & (x: 1 \rightarrow x_1); \\ -\delta \sqrt{(1-x(T))/2}, & n\bar{T} + \bar{T}/2 < T \leq n\bar{T} + 3\bar{T}/4, & (x: x_1 \rightarrow 1); \\ \delta \sqrt{(1-x(T))/2}, & n\bar{T} + 3\bar{T}/4 < T \leq n\bar{T} + \bar{T}, & (x: 1 \rightarrow x_1). \end{cases}$$

где \bar{T} – период функции $x(T)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а скобка $(x: x_1 \rightarrow 1)$ означает, что на соответствующем интервале точка $x(T)$ переходит из состояния x_1 в $x_2 = 1$. Оценка периода колебаний \bar{T} при $|c_q| > 0$ может быть найдена из очевидных неравенств:

$$\bar{T}_1 = 2\pi \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 - x_3}} \leq \bar{T} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{(x-x_3)}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}} \leq \bar{T}_2 = 2\pi \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 - x_3}}.$$

Расчеты показывают, что достаточно приемлемой для периода величиной является оценка $\bar{T} = (\bar{T}_1 + \bar{T}_2)/2$. При $c_q = 0$ период в 2 раза больше.

Данное решение качественно отличается от решения задачи при $c_q \neq 0$. Однако, при $\lambda \rightarrow 1$, решение переходит в пульсон, а при $\lambda \rightarrow 0$ (при этом λ должно стремиться к 1) – переходит в круговое стационарное состояние. Среди решений данного класса можно выделить частное, соответствующее параметрам $x_1 = x_*$, $\xi = 0$. В этом случае $\varpi(\tau) = 0$, $\omega(\tau) = -1/2$ и, следовательно, линза независимо от формы вращается на f -плоскости по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью так, что в абсолютном пространстве она является неподвижной.

D) Пульсродон с начальным состоянием покоя

Пусть в начальный момент эллиптическая линза покоится. В этом случае $\varpi_0 = \omega_0 = 0$, $\alpha = \beta = 0$ и $c_p = (1 + \lambda)^2/8$, $c_q = -(1 - \lambda)^2/8$.

Не останавливаясь на представлении соответствующих формул, отметим лишь, что линза начинает расплываться и в дальнейшем ведет себя как обычный пульсродон с параметрами:

$$\begin{aligned} \mu_E = 1, \quad \Lambda = F/(E_0 + F), \quad E_p = E_0/(1 - \Lambda), \quad \delta^2 = 4E_p(1 - \Lambda \cos \tau), \\ x_0 = 2\lambda/(1 + \lambda^2), \quad x_* = 2\Lambda x_0/(1 + \Lambda), \quad R = (1 - \Lambda)/(1 + \Lambda), \\ x_2 = \left(Rx_0 + \sqrt{(Rx_0)^2 - 4(R - 1)} \right) / 2. \end{aligned}$$

При этом для корней выполняются строгие неравенства $x_* < x_0 < x_2 < 1$, если $0 < \lambda < 1$.

7. Особенности движения пульсродона при $(|c_q| > 0, x_2 \rightarrow 1)$

Рассмотрим подмножество решений, соответствующих пульсродонам при $|c_q| > 0$, движение которых определяется подмножеством параметров:

$$P(\lambda = \lambda_c, \Lambda = \Lambda_c, \mu_E = \mu_{Ec}, x_* = x_{*c}, 0 \leq \mu_x < 1) \subset P_x,$$

принадлежащих области P_x (4.10), где значения с индексом c характеризуют конкретные выбранные величины. Оставшийся произвольный в интервале параметр μ_x определяет второй корень x_2 по формулам (4.9).

При $\mu_x \rightarrow 1$ и соответственно $x_2 \rightarrow 1$ в интеграле (3.2) и в исходных уравнениях (3.3) возникают особенности, которые определяются наличием функций $(c_q/q^2, c_q^2/q^2)|_{x \rightarrow x_2} \sim 1/\sqrt{1-x_2}$, неограниченно возрастающих при $x_2 \rightarrow 1$. Как следствие, неограниченно возрастают с противоположными знаками соответствующие угловые скорости (ϖ, ω) в (3.20), а также компоненты (см. (2.6)) скорости:

$$u = (\dot{a}/a)x - \varpi(a/b)y, \quad v = \varpi(b/a)x + (\dot{b}/b)y.$$

Данный феномен является на самом деле результатом перехода во вращающуюся с угловой скоростью ω систему координат, оси которой связаны с главными осями эллипса. Физически нет никаких бесконечных скоростей частиц жидкости. По мере движения точки $x(T)$ из состояния x_1 в x_2 линза становится в плане более округлой, в пределе при $x_2 \rightarrow 1$ – кругом, $(L(x) = b/a = (1 - \sqrt{1-x^2})/x)$, соответственно угловая скорость ω линзы как целого неограниченно возрастает, а угловая скорость жидкости в самой линзе видится в данной системе координат также возрастающей, но с противоположным знаком.

Таким образом, вращение линзы как целого с угловой скоростью ω представляет собой фазовое явление на f -плоскости.

Чтобы убедиться в этом, выразим компоненты поля скорости для f -плоскости $(U = U_1X + U_2Y, V = V_1X + V_2Y)$ через найденные компоненты в подвижной системе координат $(u = u_1x + u_2y, v = v_1x + v_2y)$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\left[\dot{a}/a + \dot{b}/b \right] + \left[\dot{a}/a - \dot{b}/b \right] \cos 2\theta - \left[\varpi(b/a - a/b) \right] \sin 2\theta \right) / 2, \\ U_2 &= \left(-\left[\varpi(b/a + a/b) + 2\omega \right] + \left[\dot{a}/a - \dot{b}/b \right] \sin 2\theta + \left[\varpi(b/a - a/b) \right] \cos 2\theta \right) / 2, \\ V_1 &= \left(\left[\varpi(b/a + a/b) + 2\omega \right] + \left[\dot{a}/a - \dot{b}/b \right] \sin 2\theta + \left[\varpi(b/a - a/b) \right] \cos 2\theta \right) / 2, \\ V_2 &= \left(\left[\dot{a}/a + \dot{b}/b \right] - \left[\dot{a}/a - \dot{b}/b \right] \cos 2\theta + \left[\varpi(b/a - a/b) \right] \sin 2\theta \right) / 2. \end{aligned}$$

Поскольку каждое слагаемое или сомножитель в квадратных скобках правой части уравнений являются ограниченными функциями при $x_2 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \varpi(b/a + a/b) + 2\omega &= 2(c_p + c_q)/(ab) - 1, \\ \varpi(a/b - b/a) &= 2(c_p q/p + c_q p/q)/(p^2 - q^2), \quad c_q/q \sim \sqrt{(1-x_2)/(1-x)}, \\ \dot{a}/a - \dot{b}/b &= -\dot{x}/(x\sqrt{1-x^2}) = -4Sx'/(\delta^2 x\sqrt{1-x^2}) \sim \sqrt{(x_2-x)/(1-x)}, \\ \dot{a}/a + \dot{b}/b &= 2\dot{\delta}/\delta + \dot{x}/x, \end{aligned}$$

то и функции слева также являются ограниченными.

8. Выводы

1) В настоящей работе получено точное аналитическое решение уравнений мелкой воды, моделирующих в рамках общепринятых допущений динамику эллиптической линзы. Результатом решения является эллиптический вихрь, известный в литературе как пульсродон.

2) Отличительной особенностью описания динамики вихря является рассмотрение его движения в подвижной системе координат, связанной с центром масс и главными осями эллиптического вихря.

3) Стандартная редукция системы уравнений в частных производных к обыкновенным уравнениям, а также использование четырех интегралов, допускаемых системой, позволили понизить порядок системы с шестого до четвертого и далее расщепить систему на два независимых уравнения второго порядка и, в конечном итоге, свести решение к квадратурам.

4) Выяснено, что движение пульсродона определяется двумя степенями свободы, каждая из которых представляет собой периодический колебательный процесс в собственном времени. Их взаимодействие задает квазипериодическое изменение полуосей пульсродона, угловую скорость его вращения и вихря жидкости в нем.

5) Построено пространство параметров, определяющих динамику пульсродона, и проведен анализ всех его состояний.

6) Приведены подмножества параметров, определяющих известные частные решения, а также найдены новые, представляющие интерес.

Благодарности. Автор выражает признательность члену-корреспонденту РАН В. В. Жмуру за предоставленную возможность обсудить работу на семинаре по геофизической гидродинамике в ИО РАН и С. Н. Зацепе, в сотрудничестве с которым автор начал заниматься этой проблемой.

Список литературы

1. *Жарницкий Е. В.* Аналитическая модель динамики арктической вихревой линзы // Океанология. 1990. Т. 30. № 5. С. 736–742.
2. *Жарницкий Е. В.* К динамике эллиптического вихря со свободной поверхностью // Океанология. 1992. Т. 32. № 3. С. 436–445.
3. *Зацена С. Н., Галушко В. В.* О динамике жидкой линзы в двухслойно-стратифицированной среде // Труды ГОИН. 2009. № 212. С. 226–238.
4. *Монин А. С., Жихарев Г. М.* Океанские вихри // Успехи физических наук. 1990. Т. 160. № 5. С. 1–47.
5. *Ball F. K.* Some general theorems concerning the finite motion of a shallow rotating liquid lying on a paraboloid // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 17. Part 2. P. 240–256.
6. *Coushman-Rozin B., Heil W. H., Nof D.* Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings // J. Geophys. Res. 1985. Vol. 90. No. 11. P. 756–764.
7. *Coushman-Rozin B.* Linear stability of large, elliptical warm-core rings. // J. Phys. Oceanography. 1986. Vol. 16. P. 1158–1164.
8. *Coushman-Rozin B.* Exact analytical solutions for elliptical warm-core rings // Tellus. 1987. Vol. 39A. P. 235–244.
9. *Ripa P.* On the stability of elliptical vortex solutions of the shallow-water equations // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 183. P. 343–363.
10. *Rogers C.* Elliptic warm-core theory: the pulsrodon // Physics Letters. 1989. Vol. 138. No. 6. P. 267–273.
11. *Rogers C. and Schief W. K.* The pulsrodon in 2+1 – dimensional magneto-gasdynamics: Hamiltonian structure and integrability // J. Math. Phys. 2011. Vol. 52.
12. *Rogers C. and Schief W. K.* On the integrability of a Hamiltonian reduction of a 2+1 – dimensional non-isothermal rotating gas cloud system // Nonlinearity. 2011. Vol. 24. No. 11.
13. *Rubino A., Dotsenko S.* The stratified pulson // J. Phys. Oceanography. 2006. Vol. 36. P. 711–719.
14. *Young W. R.* Elliptical vortices in shallow water // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 171. P. 101–119.

Статья поступила в редакцию 24.06.2022, одобрена к печати 30.08.2022.

Для цитирования: *Галушко В. В.* Об особенностях динамики пульсродона // Океанологические исследования. 2022. № 50 (3). С. 5–26. [https://doi.org/10.29006/1564-2291.JOR-2022.50\(3\).1](https://doi.org/10.29006/1564-2291.JOR-2022.50(3).1).

ON THE FEATURES OF THE PULSRODON DYNAMICS

V. V. Galushko

*Geophysical Survey of the Russian Academy of Sciences,
189, Lenina pr., Obninsk, 249035, Russia,
e-mail: galushko_v@gsras.ru*

Equations are considered that describe the dynamics of pulsrodon in a moving coordinate system associated with the center of mass and the principal axes of an elliptical vortex. A simple and clear general solution of the system of equations in quadratures is found. A complete study of solutions depending on the parameters of the problem has been carried out. New particular solutions are obtained, which are of interest to researchers.

Keywords: pulson, rodon, pulsrodon, shallow water equations, reduced gravity, elliptical vortex, deep water lens, first integrals, parametric space

Acknowledgement: The author expresses gratitude to Corresponding Member of the RAS V. V. Zhmur for the opportunity to discuss the work at the seminar on geophysical hydrodynamics in IO RAN and S. N. Zatsëpa, in cooperation with whom the author began to deal with this problem.

References

1. Ball, F. K., 1963: Some general theorems concerning the finite motion of a shallow rotating liquid lying on a paraboloid. *J. Fluid Mech.*, **17** (2), 240–256.
2. Cushman-Rozin, B., W. H. Heil, and D. Nof, 1985: Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings. *J. Geophys. Res.*, **90** (11), 756–764.
3. Cushman-Rozin, B., 1986: Linear stability of large, elliptical warm-core rings. *J. Phys. Oceanography*, **16**, 1158–1164.
4. Cushman-Rozin, B., 1987: Exact analytical solutions for elliptical warm-core rings. *Tellus*, **39A**, 235–244.
5. Monin, A. S. and G. M. Zikharev, 1990: Ocean eddies. *Physics Uspekhi*, **33** (5), 313–339.
6. Ripa, P., 1987: On the stability of elliptical vortex solutions of the shallow-water equations. *J. Fluid Mech.*, **183**, 343–363.
7. Rogers, C., 1989: Elliptic warm-core theory: the pulsrodon. *Physics Letters*, **138** (6) 267–273.
8. Rogers, C. and W. K. Schief, 2011: The pulsrodon in 2+1 – dimensional magneto-gasdynamics: Hamiltonian structure and integrability. *J. Math. Phys.*, 52.
9. Rogers, C. and W. K. Schief, 2011: On the integrability of a Hamiltonian reduction of a 2+1 – dimensional non-isothermal rotating gas cloud system. *Nonlinearity*, **24** (11).
10. Rubino, A. and S. Dotsenko, 2006: The stratified pulson. *J. Phys. Oceanography*, **36**, 711–719.
11. Young, W. R., 1986: Elliptical vortices in shallow water. *J. Fluid Mech.*, **171**, 101–119.
12. Zatsëpa, S. N. and V. V. Galushko, 2009: O dinamike zhidkoj linzy v dvuxslojno-stratificirovannoj srede (On the dynamics of a liquid lens in a two-layer stratified medium). *Proceedings of the State Oceanographic Institute, Moscow*, **212**, 226–238.
13. Zharniczkiy, E. V., 1990: Analiticheskaya model dinamiki arkticheskoy vixrevoj linzy (Analytical model of the dynamics of the Arctic vortex lens). *Oceanology*, **30** (5), 736–742.
14. Zharniczkiy, E. V., 1992: K dinamike e'lipticheskogo vihrya so svobodnoj poverhnost'yu (On the dynamics of an elliptical vortex with a free surface). *Oceanology*, **32** (3), 436–445.

Submitted 24.06.2022, accepted 30.08.2022.

For citation: Galushko, V. V., 2022: On the feature of the pulsrodon dynamics. *Journal of Oceanological research*, **50** (3), 5–26, [https://doi.org/10.29006/1564-2291.JOR-2022.50\(3\).1](https://doi.org/10.29006/1564-2291.JOR-2022.50(3).1).