© Греков А. Н., Греков Н. А., Сычев Е. Н., Кузьмин К. А., 2022, Океанологические исследования, 2022, Том 50, № 2, С. 5–33

УДК 551.46.08 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2022.50(2).1

МЕТОД РАСЧЕТА СКОРОСТИ ЗВУКА В МОРСКОЙ ВОДЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ БЫСТРОМЕНЯЮЩИХСЯ ОКЕАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. Н. Греков, Н. А. Греков, Е. Н. Сычев, К. А. Кузьмин

Институт природно-технических систем (ИПТС),
Россия, 299011, г. Севастополь, ул. Ленина, д. 28,
e-mail: i@angrekov.ru

В работе представлены два компактных полиномиальных уравнения, выражающих зависимость скорости звука в морской воде от входных параметров: температуры *in situ*, гидростатического давления и абсолютной солености. Уравнения получены аппроксимацией стандартного Международного уравнения состояния TEOS-10. Первое уравнение предназначено для использования в технических целях и воспроизводит данные TEOS-10 по скорости звука морской воды в широком диапазоне параметров водной среды со среднеквадратическим отклонением 0.987 см/с. Второе, более точное, уравнение предназначено для применения в научных целях и воспроизводит данные TEOS-10 по скорости звука в морской воде в океанографическом диапазоне параметров со среднеквадратическим отклонением 0.113 см/с. Уравнения могут быть использованы для решения прямых и обратных расчетных задач. В прямой расчетной задаче по измеренным значениям входных параметров рассчитывается соответствующее им значение скорости звука. В обратной расчетной задаче по измеренным значениям скорости звука и каким-либо двум из трех входных параметров рассчитывается соответствующее им значение неизвестного третьего входного параметра. В результате проведенного исследования экспериментально подтверждена более высокая эффективность использования разработанных уравнений с точки зрения их быстродействия, занимаемой компьютерной памяти и энергопотребления по сравнению с применением Международного уравнения состояния TEOS-10. Разработанные уравнения, алгоритмы и программы для микроконтроллеров являются удобными инструментами для оснащения различных морских платформ и особенно быстродвижущихся подводных аппаратов. Применение этих уравнений позволит получать экспериментальные данные с высокой точностью, выполнять измерения в реальном масштабе времени в условиях быстроменяющейся водной среды, что может быть использовано и для коррекции движения самих подводных аппаратов.

Ключевые слова: морская вода, измерения, скорость звука, температура, гидростатическое давление, абсолютная соленость, уравнение состояния, аппроксимация, TEOS-10, микроконтроллер, подводные аппараты

Введение

Задача обработки и анализа экспериментальных данных в реальном масштабе времени, получаемых при экспедиционных исследованиях гидрофизических полей, требует создания алгоритма расчета для конкретных аппаратных средств, который

должен обеспечивать минимальные временные затраты при требуемой точности. В нашем случае это касается скорости звука в морской воде, температуры, гидростатического давления и абсолютной солености. Все эти параметры могут быть получены современными инструментальными средствами, установленными на подводных глубоководных аппаратах, которые движутся с большой скоростью. При этом полученные расчетные характеристики полей должны иметь минимальные погрешности, так как они используются, в том числе, для коррекции движения самих подводных аппаратов. Развитие микроэлектронной и микропроцессорной элементной базы сделало возможным перенесение значительного объема операций по обработке результатов измерений непосредственно в подводные модули, оснащенные микроконтроллерами.

В океанографических исследованиях скорость звука рассматривается как альтернатива электрической проводимости для определения абсолютной солености морской воды. Это связано с тем, что скорость звука реагирует на полный состав растворенного вещества, включая как ионную, так и не ионную составляющие. В отличие от скорости звука электрическая проводимость чувствительна только к ионной составляющей растворенного вещества. Кроме того, современные датчики скорости звука могут производить измерения с высокой частотой, что создает новые возможности для исследования мелкомасштабных и быстропротекающих гидрофизических процессов в океанах с временными масштабами от 10^{-3} с.

Определение скорости звука может осуществляться двумя способами: прямым или косвенным. При прямом способе данные *in situ* по скорости звука могут быть получены путем непосредственных измерений скорости с помощью соответствующих измерительных каналов (Греков, 2017). При косвенном способе расчетные данные по скорости звука могут быть получены путем вычисления по специально разработанным уравнениям с использованием результатов измерений *in situ* входных параметров уравнений в точках контроля.

Материалы и методы

Уже с середины прошлого века различными исследователями предпринимались попытки разработки уравнений скорости звука для жидкой среды (Del Grosso, 1952; Wood, 1955). Как правило, для уравнений скорости звука использовалась полиномиальная форма зависимости выходного параметра – скорости звука – от входных параметров состояния среды. Причем если скорость звука в пресной воде зависит от двух параметров состояния, то скорость звука в морской воде зависит уже от трех параметров состояния.

Уравнения скорости звука для пресной воды в полиномиальной форме могут быть представлены в следующем общем виде:

$$c(X_1, X_2) = \sum_{i=0} \sum_{j=0} a_{ij} X_1^i X_2^j. \quad (1)$$

В качестве входных параметров в уравнениях скорости звука для пресной воды обычно принимают температуру ($X_1 = T$) и давление ($X_2 = P$), либо некоторые их функции $X_1(T)$ и $X_2(P)$. Здесь и далее под давлением подразумевается гидростатическое давление среды в точке измерения.

Уравнения скорости звука для морской воды в полиномиальной форме могут быть представлены в следующем общем виде:

$$c(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} b_{ijk} X_1^i X_2^j X_3^k. \quad (2)$$

В качестве входных параметров в уравнениях скорости звука для морской воды в основном используются температура ($X_1 = T$), глубина измерения ($X_2 = D$), либо давление ($X_2 = P$) и соленость ($X_3 = S$), или некоторые функции указанных параметров. Глубина измерения (D), не являясь параметром состояния, может быть использована в качестве независимого параметра уравнения вместо давления (P), поскольку величины P и D функционально взаимно однозначно связаны между собой.

В таблице 1 приводятся некоторые характеристики ряда уравнений скорости звука для пресной и морской воды.

Таблица 1 – Характеристики уравнений скорости звука для пресной и морской воды

Источник	Год	Число коэффициентов, n	Входные параметры	Максимумы показателей степени входных параметров, $\{i/j/k\}_{max}$	Область действия	Точность, см/с
Пресная вода						
(Bilaniuk, 1993)	1993	6	T, $P = 0$	5/0	0–100 °C, 0 MPa, 0 ‰	
(Marczak, 1997)	1997	6	T, $P = 0$	5/0	0–95 °C, 0 MPa, 0 ‰	
(Lubbers, 1998)	1998	3	T, $P = 0$	2/0	10–40 °C, 0 MPa, 0 ‰	18
(Belogol'skii, 1999)	1999	18	T, P	5/3	0–40 °C, 0–60 MPa, 0 ‰	2–3
(Греков, 2016)	2016	40	T, P	7/4	0–300 °C, 0–120 MPa, 0 ‰	8
Морская вода						
(Del Grosso, 1952)	1952	10	T, $P = 0$, S	4/0/4	$P = 0$, 10–20 ‰	50–80
(Wood, 1955)	1955	5	T, D, S	2/1/1	5–15 °C, 10–20 ‰	150
(Wilson, 1962)	1962	23	T, P, S	4/4/3	4–30 °C, 0–100 MPa, 0–37 ‰	22

Продолжение таблицы 1

Источник	Год	Число коэффициентов, *n*	Входные параметры	Максимумы показателей степени входных параметров, $\{i/j/k\}_{max}$	Область действия	Точность, см/с
Морская вода						
(Leroy, 1969)	1969	14	*T*, *D*, *S*, *Φ*	3/3/1/1	0–20 °C, 0–8000 м, 30–41 ‰	10
(Frye, 1971)	1971	12	*T*, *P*, *S*	3/4/3	3–30 °C, 0–98 MPa, 33–36.6 епс	10
(Del Grosso, 1974)	1974	19	*T*, *P*, *S*	3/3/2	0–30 °C, 0–100 MPa, 30–40 ‰	5
(Medwin, 1975)	1975	7	*T*, *D*, *S*	3/1/1	0–35 °C, 0–1000 м, 0–45 ‰	20
(Chen, 1977)	1977	42	*T*, *P*, *S*	5/3/2	0–40 °C, 0–100 MPa, 0–40 ‰	20
(Mackenzie, 1981)	1981	9	*T*, *D*, *S*	3/3/1	2–30 °C, 0–8000 м, 25–40 ‰	
(Coppens, 1981)	1981	13	*T*, *D*, *S*	3/2/2	2–35 °C, 0–4000 м, 0–45 ‰	
(Leroy, 2008)	2008	14	*T*, *D*, *S*, *Φ*	3/3/1/1	0–30 °C, 0–9000 м, 30–41 ‰	20

В уравнении Leroy (Leroy, 1969; Leroy, 2008) в качестве дополнительного четвертого параметра использована географическая широта места (*Φ*) в градусах, которая ни прямо, ни косвенно не является параметром состояния среды.

Из анализа таблицы 1 следует, что при наличии достаточного количества данных о скорости звука, для повышения точности и расширения области действия разрабатываемого уравнения требуется соответствующее увеличение максимальных показателей степени входных параметров и числа коэффициентов в матрице уравнения.

Например, разработанное уравнение скорости звука для пресной воды (Греков, 2016) включает достаточно большое число коэффициентов ($n = 40$). Благодаря этому данное уравнение имеет приемлемую точность в широком диапазоне условий среды.

Для морской воды в качестве примера рассмотрим уравнение скорости звука Chen, Millero (Chen, 1977), которое было принято в качестве уравнения UNESCO для скорости звука (Fofonoff, 1983). Это уравнение включает 42 коэффициента и также имеет достаточно широкую область действия. Индексная матрица уравнения скорости звука UNESCO является трехиндексной и приведена в таблице 2.

Таблица 2 – Индексная матрица уравнения скорости звука UNESCO (Fofonoff, 1983)

k =	0	0	0	0	1	1	1	1	1.5	1.5	2	2
j =	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	0	1
i = 0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
i = 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
i = 2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
i = 3	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
i = 4	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
i = 5	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Значения индексов i, j, k являются показателями степени входных параметров (переменных) – температуры, давления и солености соответственно. Максимальные показатели степени входных переменных равны: по температуре $i_{max} = 5$, по давлению $j_{max} = 3$ и по солености $k_{max} = 2$. Отметим, что среди значений индекса k имеется и нецелое значение $k = 1.5$. Число «1» на пересечении индексных строк «i» и столбцов («j» «k») в матрице индексов означает, что данная комбинация индексов использована, а число «0» означает, что данная комбинация индексов пропущена. Например, пересечение строки $i = 1$ со столбцом ($j = 0$; $k = 1.5$) (выделено цветом фона в таблице 2) дает комбинацию трех индексов $ijk = (i)(j)(k) = (1)(0)(1.5)$, т.е. «$i = 1$, $j = 0$, $k = 1.5$». Данная комбинация индексов в уравнении используется, так как число в точке пересечения индексных строки и столбца равно «1».

Следует отметить, что со временем точность уравнения UNESCO для скорости звука перестала удовлетворять исследователей, однако его продолжали использовать в научных и технических приложениях, поскольку заменить его было нечем.

В 2010 г. было разработано Международное термодинамическое уравнение состояния для морской воды TEOS-10 (IOC et al., 2010). Это термодинамическое уравнение морской воды основано на функции Гиббса $g(T, P, S_A)$, из которой с помощью дифференциальных соотношений термодинамики рассчитываются другие термодинамические свойства морской воды. В качестве входных параметров функции Гиббса используются температура *in situ* (T), гидростатическое давление (P) и абсолютная соленость (S_A).

Однако в библиотеке функций и подпрограмм TEOS-10 нет специального уравнения, прямо выражающего зависимость скорости звука от входных параметров. В TEOS-10 (IOC et al., 2010) скорость звука выражается косвенно через функцию Гиббса (g) посредством дифференциальных соотношений термодинамики:

$$c = c\left(T, P, S_A\right) = g_P\left(g_{TT} \Big/ \left[g_{TP}^2 - g_{TT} g_{PP}\right]\right)^{0,5}, \tag{3}$$

где g_P, g_{TT}, g_{TP}, g_{PP} – частные производные функции Гиббса по температуре и давлению.

Комплекс программных кодов на языке MATLAB из библиотеки Gibbs SeaWater (GSW) TEOS-10 (IOC et al., 2010) для расчетов по уравнению (3) включает

большое количество (несколько сотен) коэффициентов и имеет суммарный объем более 27 килобайт. В итоге использование уравнения (3) требует большого объема занимаемой компьютерной памяти и приводит к существенному увеличению времени расчета.

Взаимосвязь между абсолютной соленостью и практической соленостью морской воды устанавливается следующим уравнением (IOC et al., 2010)

$$S_A = u_{PS} S_P + \delta S_A, \text{ г/кг} \tag{4}$$

Здесь $u_{PS} = (35.16504/35)$ г/кг; S_P – практическая соленость, безразмерная величина, определяемая согласно Международной шкалы практической солености от 1978 г. (IOC et al., 2010); δS_A – аномалия абсолютной солености, г/кг. В случае отсутствия данных об аномалии абсолютной солености принимаем:

$$S_A = u_{PS} S_P = (35.16504/35) S_P = 1.00472 S_P, \text{ г/кг} \tag{5}$$

Следует отметить, что уравнение (3) воспроизводит основные данные по скорости звука, которые были включены в функцию Гиббса TEOS-10 (см. таблицу O.1 Приложения O Руководства TEOS-10 (IOC et al., 2010)) со среднеквадратической ошибкой 3.5 см/с.

В результате сравнения уравнения скорости звука UNESCO (Chen, 1977) с уравнением (3) скорости звука TEOS-10 (IOC et al., 2010) нами было установлено, что уравнение скорости звука UNESCO воспроизводит данные по скорости звука уравнения (3) с неприемлемо большой среднеквадратической ошибкой в 70 см/с, причем предельные отклонения достигают 200–300 см/с.

На рисунке 1 показаны рассчитанные для уравнения UNESCO предельные и среднеквадратические отклонения скорости звука от данных TEOS-10 при различных давлениях.

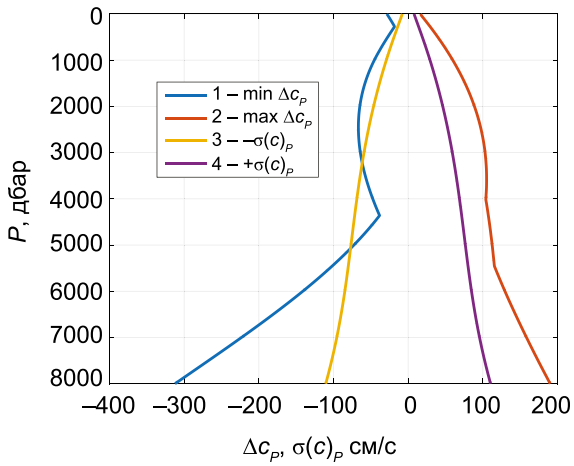


Рис. 1 – Предельные и среднеквадратические отклонения данных уравнения UNESCO от данных TEOS-10 в зависимости от давления

Из рисунка 1 следует, что с ростом давления среднеквадратическая ошибка в зависимости от давления $\sigma(c)_P$ достаточно быстро возрастает и начинает превышать 70 см/с при давлениях больших 4000 дбар.

Кроме того, неприемлемость уравнения UNESCO для дальнейшего использования подтверждается также тем, что гистограмма отклонений этого уравнения от данных TEOS-10, хотя и близкая по своей форме к нормальной, тем не менее, имеет существенно отличное от нуля (порядка +60 см/с) систематическое смещение от средней (нулевой) точки в данном случае вправо (см. таблицу 3).

Таблица 3 – Гистограмма отклонений расчетной скорости звука уравнения UNESCO от данных TEOS-10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	см/с
<–160	<–120	<–80	<–40	<0	<40	<80	<120	<160	<+∞	Всего:
0.16484	0.18393	0.32722	0.75330	4.80771	26.19674	41.18864	21.00366	4.65108	0.72289	100 %

Графическое представление гистограммы отклонений расчетной скорости звука в морской воде по уравнению UNESCO по всему массиву исходных данных (2 630 961 точек) TEOS-10 показано на рисунке 2.

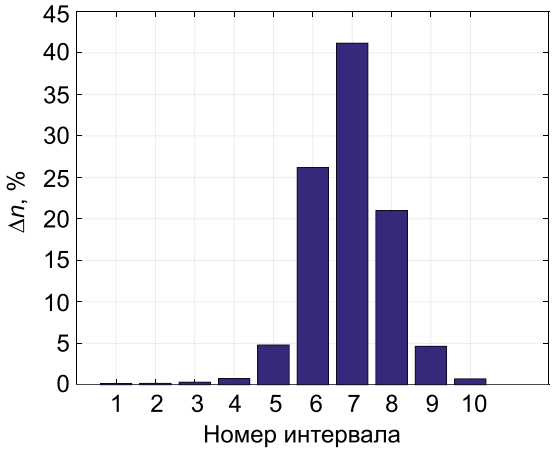


Рис. 2 – Гистограмма отклонений скорости звука по уравнению UNESCO от данных TEOS-10

Из сказанного выше следует, что уравнение UNESCO непригодно для дальнейшего использования в качестве источника данных о скорости звука, поскольку, как теперь уже ясно, это уравнение не согласуется с Международным уравнением TEOS-10. Однако попытки использования уравнение UNESCO продолжаются. Например, в работе (Allen, 2017) уравнение UNESCO использовано как источник данных при разработке «точного» (!) обратного полиномиального уравнения для солености в явном виде $S = S(T, P, c)$. Следует отметить, что, во-первых, в работе (Allen, 2017) почему-то без должного анализа в качестве источника данных был взят непригодный источник – уравнение UNESCO. Во-вторых, сама полиномиальная форма уравнения

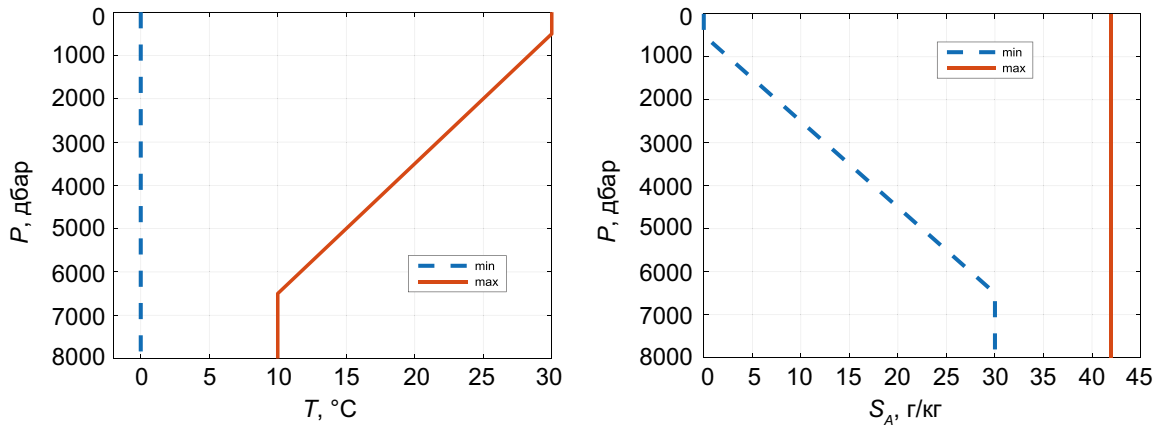
является мало пригодной для аппроксимации явной функциональной зависимости солености от скорости звука в широком диапазоне значений температуры и давления. Последний факт подтвержден исследованиями, выполненными в нашей работе (Греков, 2018).

В библиотеке функций и подпрограмм TEOS-10 Gibbs SeaWater (GSW) Oceanographic Toolbox (Приложение N) (IOC et al., 2010) имеется также вспомогательный вариант уравнения скорости звука, которое получено с использованием упрощенного уравнения состояния морской воды и предназначено для выполнения расчетов в океанографическом диапазоне параметров:

$$c = c(\Theta, P, S_A), \tag{6}$$

где $\Theta = \Theta(T, P, S_A)$ – консервативная температура (CT), T – температура *in situ*, P – гидростатическое давление, S_A – абсолютная соленость. Программные коды для уравнения (6) содержат два полинома с общим числом коэффициентов (75 + 47) = 122 и имеют на языке MATLAB объем в 10 килобайт. Однако при расчетах скорости звука по уравнению (6) потребуется постоянно выполнять пересчет температуры *in situ* (T) в консервативную температуру $\Theta(T, P, S_A)$ с использованием дополнительно 7 подпрограмм общим объемом в 21 килобайт. В результате суммарный объем комплекса программных кодов для выполнения расчетов по уравнению (6) составляет порядка (10 + 21) = 31 килобайт. В итоге использование уравнения (6) требует большого объема занимаемой компьютерной памяти и приводит к существенному увеличению времени расчета.

Упрощенное уравнение скорости звука (6) действительно для более узкого и более вероятного с точки зрения реализации на практике океанографического диапазона параметров морских вод. Граничные значения температуры и солености в зависимости от гидростатического давления в океанографическом диапазоне параметров показаны на рисунке 3.



а б

Рис. 3 – Граничные значения температуры (**а**) и солености (**б**) в океанографическом диапазоне параметров в зависимости от давления

Среднеквадратическое отклонение (СКО) σ(c) для упрощенного уравнения (6) от данных точного уравнения (3) TEOS-10 в океанографическом диапазоне параметров составляет 2.1 см/с, максимальные предельные отклонения скорости звука находятся в пределах около 15 см/с. На рисунке 4 показаны рассчитанные для упрощенного уравнения (6) предельные и среднеквадратические отклонения скорости звука от данных точного уравнения (3) TEOS-10 при различных давлениях.

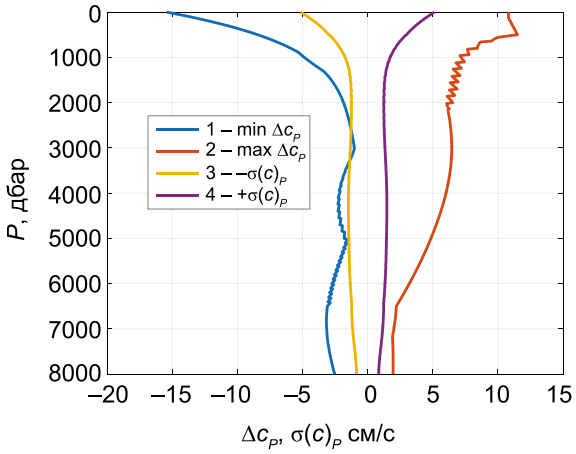


Рис. 4 – Предельные и среднеквадратические отклонения данных упрощенного уравнения (6) от данных точного уравнения (3) TEOS-10 в зависимости от давления

Гистограмма расчетных отклонений в океанографическом диапазоне параметров для упрощенного уравнения (6) от данных точного уравнения (3) TEOS-10 приведена в таблице 4 и имеет характер близкий к нормальному закону распределения отклонений.

Таблица 4 – Гистограмма отклонений расчетной скорости звука упрощенного уравнения (6) от данных точного уравнения (3) TEOS-10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	см/с
<–8	<–6	<–4	<–2	<0	<2	<4	<6	<8	<+∞	Всего:
1.11592	0.8337	1.63056	5.3955	39.60257	40.62538	8.64669	1.84122	0.23031	0.07815	100 %

Графическое представление гистограммы отклонений расчетной скорости звука в морской воде по всему массиву исходных данных (895 765 точек) для упрощенного уравнения (6) показано на рисунке 5.

Из сказанного следует, что разработанные ранее уравнения для скорости звука для морской воды (см. таблицу 1) не отвечают потребностям сегодняшнего дня по точности и области действия. В то же время в библиотеке функций и подпрограмм Международного термодинамического уравнения состояния для морской воды TEOS-10 не существует отдельного специального уравнения, прямо выражающего зависимость скорости звука от температуры *in situ*, давления и абсолютной солености. Используемый в TEOS-10 способ вычисления скорости звука через функцию

Гиббса для морской воды по уравнению (3) является очень сложным и громоздким и требует для своей реализации достаточно большого объема программных кодов. Подобный недостаток в полной мере относится также и ко второму способу вычисления скорости звука по уравнению (6). Кроме того, уравнение (6) имеет пониженную точность по сравнению с уравнением (3). Таким образом, оба метода расчета практически непригодны для использования на мобильных морских платформах.

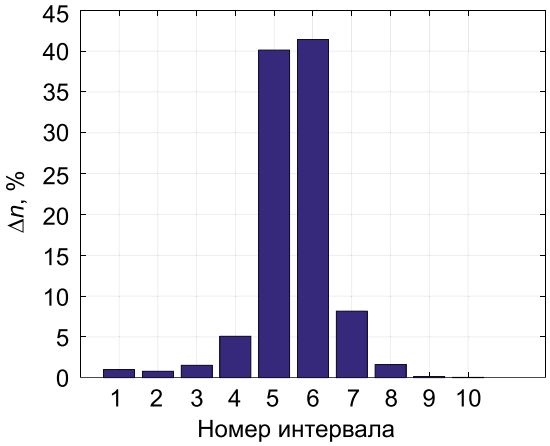


Рис. 5 – Гистограмма отклонений скорости звука по упрощенному уравнению (6) от данных точного уравнения (3) TEOS-10

В связи с этим задача создания специализированных уравнений для скорости звука в морской воде является актуальной.

Форма разработанного уравнения скорости звука для морской воды

Разработанное нами новое интерполяционное уравнение скорости звука морской воды имеет удобную полиномиальную форму:

$$\omega = \sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} b_{ijk}\gamma^i\pi^j\lambda^k, \tag{7}$$

где $\omega = (c - c_0)/c^*$; $\gamma = (T - T_0)/T^*$; $\pi = (P_{абс} - P_0)/P^*$; $\lambda = (S_A - S_{A0})/S_A{}^*$; $T_0 = -10$ °C; $T^* = 50$ °C; $P_0 = 0$ дбар; $P^* = 12\,000$ дбар; $c_0 = 1300$ м/с; $c^* = 500$ м/с; $S_{A0} = -10$ г/кг; $S_A{}^* = 50$ г/кг.

В качестве входных параметров в этом уравнении используются приведенные к безразмерной форме три параметра морской воды: температура *in situ* (T), гидростатическое давление (P) и абсолютная соленость (S_A). Эти параметры приняты нами в соответствии с Международным термодинамическим уравнением состояния морской воды TEOS-10 (IOC et al., 2010). Уравнение в форме (7) выражает функциональную зависимость скорости звука в морской воде от входных параметров в явной форме и может быть полезным в морских исследованиях. Преимущество уравнения заключается в том, что оно является достаточно компактным и при расчетах не

требует привлечения каких-либо других дополнительных уравнений или программных кодов.

Для уравнения скорости звука в морской воде в форме (7) использована разработанная нами ранее для уравнения плотности трехиндексная матрица (Grekov, 2019). Эта трехиндексная матрица содержит 80 ненулевых коэффициентов и приведена в таблице 5. Структура данной трехиндексной матрицы была подобрана в результате многочисленных вычислительных экспериментов.

Таблица 5 – Трехиндексная матрица для уравнения в полиномиальной форме (7)

$k=$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6
$j=$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	0	1	2	0	1	0
$I=0$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$I=1$	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
$I=2$	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
$I=3$	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
$i=4$	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
$i=5$	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
$i=6$	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

В этой трехиндексной матрице на каждом из пересечений строк и столбцов может быть получена только одна, являющаяся уникальной (то есть, неповторяющейся), комбинация трех индексов *i, j* и *k*. Общее количество таких комбинаций в данной матрице составляет 168. Однако часть из них без большого ущерба для точности уравнения может быть опущена. Следует отметить, что при увеличении количества используемых комбинаций точность уравнения, как правило, повышается (при плохой обусловленности задачи возможно иное). Но, с другой стороны, это ведет к быстрому усложнению задачи определения коэффициентов уравнения. При уменьшении количества используемых комбинаций указанные процессы идут в обратном направлении. Поэтому очень важно суметь найти или подобрать такой набор комбинаций индексов, который позволит достичь желаемой точности уравнения при не слишком большом количестве коэффициентов, образующих уравнение. При разработке матрицы уравнения нам удалось более, чем вдвое, снизить количество используемых комбинаций. Здесь число «1» означает, что данная комбинация индексов использована, а число «0» означает, что данная комбинация индексов пропущена. Всего в данной индексной матрице использовано 80 комбинаций, то есть уравнение (7) в таком случае будет содержать 80 коэффициентов $\{b_{ijk}\}$. Используемые комбинации индексов (*ijk*) в трехмерном пространстве индексов *i–j–k* показаны на рисунке 6.

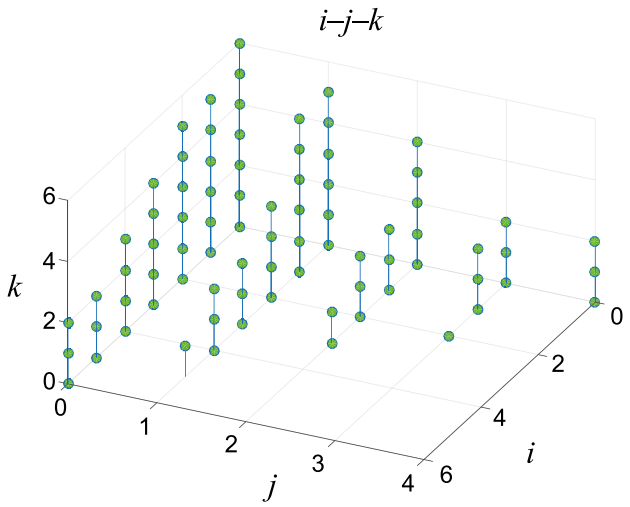


Рис. 6 – Используемые комбинации индексов (*ijk*) в пространстве индексов (показаны точками)

Следует также отметить, что полиномиальная форма вида (7) является удобной для дифференцирования уравнения по входным параметрам (T, P, S_A). Например, для взятия частной производной первого порядка по температуре ($\partial c/\partial T$) потребуются несложные вычисления следующего характера, например: $(\partial\omega/\partial T) = (1/c^*)\,(\partial c/\partial T)$ или $(\partial c/\partial T) = c^*(\partial\omega/\partial T)$ и $(\partial\gamma^i/\partial T) = (i/T^*)\gamma^{i-1}$. С учетом этого достаточно просто можно получить аналитические выражения для вычисления коэффициентов чувствительности по каждому из трех параметров: температуре, давлению и абсолютной солености:

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{c^*}{T^*}\sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} i\cdot b_{ijk}\gamma^{i-1}\pi^j\lambda^k, \tag{8}$$

$$\frac{\partial c}{\partial P} = \frac{c^*}{P^*}\sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} j\cdot b_{ijk}\gamma^{i}\pi^{j-1}\lambda^k, \tag{9}$$

$$\frac{\partial c}{\partial S_A} = \frac{c^*}{S_A^*}\sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} k\cdot b_{ijk}\gamma^{i}\pi^{j}\lambda^{k-1}. \tag{10}$$

Возможно также получение путем несложных преобразований аналитических выражений как для частных производных более высокого порядка, так и для смешанных частных производных, например:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial T^2} = \frac{c^*}{T^{*2}}\sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} i\cdot(i-1)\cdot b_{ijk}\gamma^{i-2}\pi^j\lambda^k, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial P\partial S_A} = \frac{c^*}{P^*\cdot S_A^*}\sum_{i=0}\sum_{j=0}\sum_{k=0} j\cdot k\cdot b_{ijk}\gamma^{i}\pi^{j-1}\lambda^{k-1}. \tag{12}$$

Особым достоинством уравнения в форме (7) является то, что оно создает возможности для быстрого конструирования специализированных уравнений скорости звука под различные диапазоны изменения входных параметров.

Уравнение I скорости звука в морской воде для технических целей (в широком диапазоне параметров)

Уравнение I скорости звука разработано нами для аппроксимации данных TEOS-10 по скорости звука в достаточно широких диапазонах параметров морских вод, которые включают в себя также и менее вероятные, или аномальные, с точки зрения реализации в океане, сочетания параметров. В данном случае для уравнения I приняты следующие диапазоны изменения входных параметров температуры, гидростатического давления и абсолютной солености: 0–40 °C; 0–8000 дбар и 0–42 г/кг, соответственно. Массив исходных данных вида $\{c_j, T_j, P_j, S_{Aj}\}_{j=1...M1}$, в котором общее количество $M1$ четверных групп равно 2 760 885, был сгенерирован на основе термодинамической функции для скорости звука в морской воде (3) с использованием программных кодов библиотеки подпрограмм Gibbs SeaWater (GSW) Oceanographic Toolbox TEOS-10 (Приложение N) (IOC et al., 2010).

Значения скорости звука рассчитывались в заданных выше диапазонах параметров с шагами 0.5 °C, 20 дбар и 0.5 г/кг по температуре, давлению и абсолютной солености соответственно. При этом диапазон изменения скорости звука составляет от 1402 до 1705 м/с. Следует отметить, что в наборе из четырех параметров (c, T, P, S_A) только три, в любом сочетании, могут быть использованы в качестве независимых.

Коэффициенты b_{ijk} уравнения I скорости звука в форме (7) были рассчитаны авторами по методу наименьших квадратов (Линник, 1962) и совместно с индексами приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Индексы и коэффициенты уравнения I скорости звука в морской воде

N	*i*	*j*	*k*	*bijk*	*N*	*i*	*j*	*k*	*bijk*
1	0	0	0	0.0625309044712751	41	0	0	2	0.050060227088998
2	1	0	0	0.631648720424777	42	1	0	2	–0.0276533424300442
3	2	0	0	–0.274784720038153	43	2	0	2	0.453071940287829
4	3	0	0	–0.0695520646347681	44	3	0	2	–0.788904465294538
5	4	0	0	0.177839761852508	45	4	0	2	0.610049022669423
6	5	0	0	–0.119943678066676	46	5	0	2	–0.240157863815975
7	6	0	0	0.0325339484664947	47	6	0	2	0.0675722323114306
8	0	1	0	0.398599525600709	48	0	1	2	0.437869534581009
9	1	1	0	–0.0471035788482847	49	1	1	2	0.35083477091261
10	2	1	0	0.240212625705466	50	2	1	2	–0.293335669097986
11	3	1	0	–0.215145135299482	51	3	1	2	0.257278164757469
12	4	1	0	0.0724107406825849	52	4	1	2	–0.0535986097137575
13	0	2	0	0.100143540399763	53	0	2	2	0.16601322276942

Продолжение таблицы 6

N	*i*	*j*	*k*	*bijk*	*N*	*i*	*j*	*k*	*bijk*
14	1	2	0	–0.216003804987712	54	1	2	2	–0.123361288236058
15	2	2	0	0.089462779325042	55	2	2	2	0.101750593886445
16	3	2	0	0.00695997155368826	56	0	3	2	–0.0118244373758512
17	0	3	0	–0.0329428928686742	57	1	3	2	0.00630908927885075
18	1	3	0	0.110957684324655	58	0	4	2	–0.00381132381636728
19	2	3	0	–0.0765015802998694	59	0	0	3	–0.209953619721049
20	0	4	0	–0.0022302081207843	60	1	0	3	–0.145695199458177
21	0	0	1	0.139705088812716	61	2	0	3	0.0272136218751268
22	1	0	1	0.0288265320944127	62	3	0	3	0.0636680264736109
23	2	0	1	–0.500269681328054	63	4	0	3	–0.0627157091250763
24	3	0	1	0.986003947478676	64	0	1	3	–0.659210701346777
25	4	0	1	–0.931496669741354	65	1	1	3	–0.294336986043981
26	5	0	1	0.458974640623913	66	2	1	3	–0.0139738338577198
27	6	0	1	–0.108265808148612	67	0	2	3	–0.121456557653898
28	0	1	1	–0.142753036334671	68	0	0	4	0.377030002242572
29	1	1	1	–0.0366671512907003	69	1	0	4	0.101016578229675
30	2	1	1	–0.0788544250957001	70	2	0	4	–0.0539054121997818
31	3	1	1	–0.144953240219386	71	3	0	4	0.0318834912323972
32	4	1	1	0.264611673531462	72	0	1	4	0.465665800150532
33	5	1	1	–0.127837401288474	73	1	1	4	0.208108411497426
34	0	2	1	–0.0675420950116473	74	0	2	4	0.0353773098836841
35	1	2	1	–0.0312564555903514	75	0	0	5	–0.297129614540284
36	2	2	1	0.167603382995721	76	1	0	5	–0.0199675946008322
37	3	2	1	–0.0877174438176924	77	2	0	5	–0.000433134976173768
38	0	3	1	0.0223687741462944	78	0	1	5	–0.135192761605371
39	1	3	1	–0.0142812430389166	79	1	1	5	–0.0565310444635338
40	0	4	1	–0.0098418399284615	80	0	0	6	0.0876544580241596

Среднеквадратическое отклонение (СКО) σ(*c*) по всему массиву исходных данных для уравнения I составляет 0.987 см/с, что в 3.5 раза меньше чем СКО σ(*c*) для уравнения (3). Гистограмма расчетных отклонений, приведенная в таблице 7, подтверждает нормальный закон распределения отклонений. Количество расчетных точек, в которых отклонения превышают 3σ(*c*), составляет 1.34 %.

Таблица 7 – Гистограмма отклонений расчетной скорости звука для уравнения I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	см/с
<–4	<–3	<–2	<–1	<0	<1	<2	<3	<4	<+∞	Всего:
0.36662	0.31562	1.30089	9.28264	37.45209	41.21704	7.95803	1.44780	0.40538	0.253904	100 %

Графическое представление гистограммы отклонений расчетной скорости звука в морской воде по всему массиву исходных данных (2 760 885 точек) для уравнения I показано на рисунке 7.

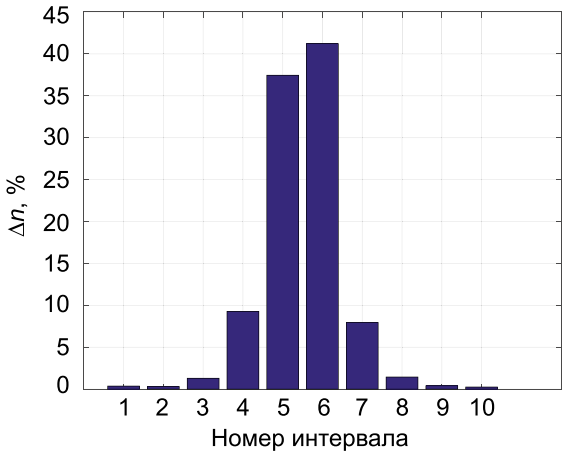


Рис. 7 – Гистограмма отклонений расчетной скорости звука для уравнения I от данных TEOS-10

На рисунках 8–11 представлен ряд показателей, также характеризующих качество аппроксимации и некоторые свойства уравнения I.

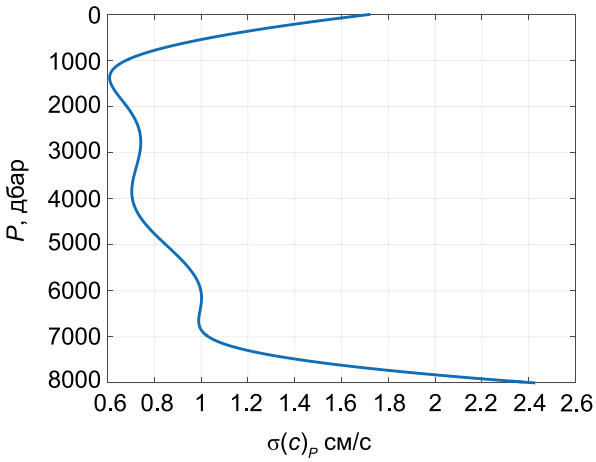


Рис. 8 – Среднеквадратические отклонения значений скорости звука, рассчитанных по уравнению I, от данных TEOS-10 в зависимости от давления

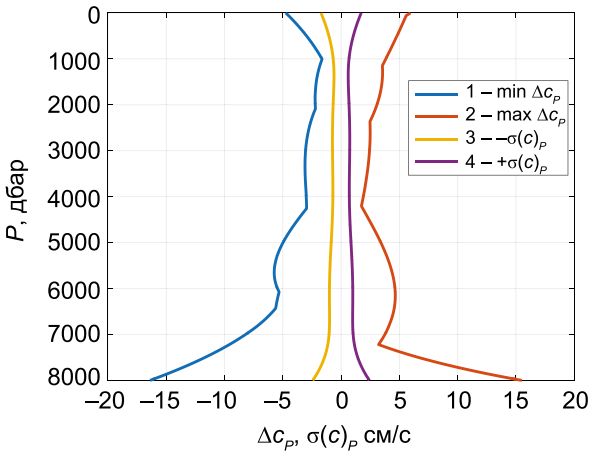


Рис. 9 – Предельные и среднеквадратические отклонения значений скорости звука, рассчитанных по уравнению I, от данных TEOS-10 в зависимости от давления

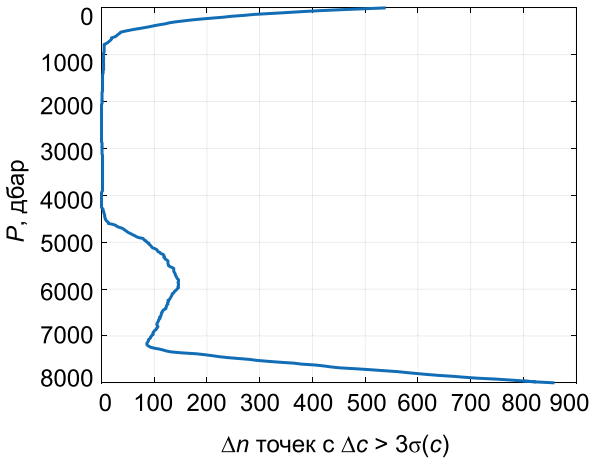


Рис. 10 – Распределение по давлению количества точек, в которых отклонения расчетных (по уравнению I) значений скорости звука от данных TEOS-10 превышают величину в 3σ(*c*)

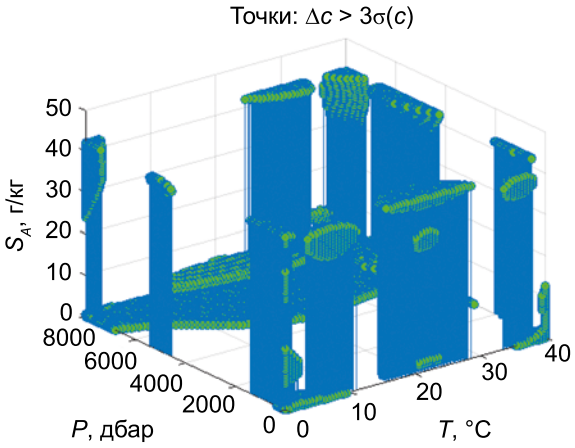


Рис. 11 – Расположение в пространстве параметров точек, в которых отклонения расчетных (по уравнению I) значений скорости звука от данных TEOS-10 превышают величину в 3σ(*c*)

Следует отметить, что уравнение I, предназначенное для применения в широких диапазонах параметров, по своим статистическим характеристикам даже превосходит уравнение (6), которое предназначено для более узкого океанографического диапазона параметров и которое по причинам вычислительного характера невозможно использовать на мобильных платформах.

Уравнение II скорости звука в морской воде для научных целей (в океанографическом диапазоне параметров)

Уравнение II скорости звука разработано для более узкого и более вероятного с точки зрения реализации на практике океанографического диапазона параметров морских вод (см. рисунок 3). Для океанографического диапазона параметров по методике, изложенной выше, был сгенерирован массив исходных данных вида $\{c_j,\ T_j,\ P_j,\ S_{Aj}\}_{j=1\ldots M2}$. В данном случае общее количество $M2$ четверных групп составило 895 765 точек, что более чем достаточно для решения задачи по определению 80 коэффициентов уравнения II. Значения скорости звука рассчитывались в океанографическом диапазоне параметров с шагами 0.5 °C, 20 дбар и 0.5 г/кг по температуре, давлению и абсолютной солености соответственно. При этом диапазон изменения скорости звука составляет от 1402 до 1631 м/с.

Коэффициенты d_{ijk} уравнения II скорости звука в форме (7), рассчитанные авторами по методу наименьших квадратов (Линник, 1962), совместно с индексами приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Индексы и коэффициенты уравнения II скорости звука в морской воде

N	i	j	k	d_{ijk}	N	i	j	k	d_{ijk}
1	0	0	0	0.0620590044265698	41	0	0	2	–0.0808340687623962
2	1	0	0	0.617745724177219	42	1	0	2	–0.121819764502341
3	2	0	0	–0.234241326785657	43	2	0	2	0.578774955993224
4	3	0	0	–0.124557426840899	44	3	0	2	–0.653423565678154
5	4	0	0	0.221148565624548	45	4	0	2	0.192818311556066
6	5	0	0	–0.143717484519968	46	5	0	2	0.0676072956906925
7	6	0	0	0.0390749333917799	47	6	0	2	–0.0227081301775832
8	0	1	0	0.386840436606626	48	0	1	2	0.208648639874848
9	1	1	0	0.0213647325917933	49	1	1	2	0.350622687564956
10	2	1	0	0.012704188719047	50	2	1	2	–0.341459261343684
11	3	1	0	0.0565464120671564	51	3	1	2	0.265315859095784
12	4	1	0	–0.0358528848600579	52	4	1	2	–0.0645041496807286
13	0	2	0	0.0969294010024098	53	0	2	2	0.0781742462972281
14	1	2	0	–0.300555266583823	54	1	2	2	–0.160958346614329
15	2	2	0	0.364085446884681	55	2	2	2	0.122555250919301
16	3	2	0	–0.209017227204802	56	0	3	2	–0.0266868601009387
17	0	3	0	–0.0302246321750662	57	1	3	2	0.0416310093131212
18	1	3	0	0.111230928286639	58	0	4	2	–0.00337236578828777
19	2	3	0	–0.10340769328563	59	0	0	3	0.152795580725519
20	0	4	0	–0.000919592982844102	60	1	0	3	–0.031258783717493
21	0	0	1	0.161271173667905	61	2	0	3	–0.209831336445231
22	1	0	1	0.0609636727019741	62	3	0	3	0.231142151753293
23	2	0	1	–0.474310498246976	63	4	0	3	–0.0665303449056541
24	3	0	1	0.642970500701068	64	0	1	3	–0.27224493820009
25	4	0	1	–0.284424942694638	65	1	1	3	–0.239967677647697
26	5	0	1	–0.0390237904191227	66	2	1	3	0.00877276668717334
27	6	0	1	0.0400593387838959	67	0	2	3	–0.0261822831129342
28	0	1	1	–0.0654032677220473	68	0	0	4	–0.137756789232405
29	1	1	1	–0.167733515918551	69	1	0	4	0.061461780780193
30	2	1	1	0.223846662254079	70	2	0	4	0.0235915544970737
31	3	1	1	–0.222045333744522	71	3	0	4	–0.0275506853994817
32	4	1	1	–0.0455571954609478	72	0	1	4	0.14917275350087
33	5	1	1	0.0930396469026178	73	1	1	4	0.153610824555912
34	0	2	1	–0.046040416191755	74	0	2	4	0.00234510430155345

Продолжение таблицы 8

N	i	j	k	d_{ijk}	N	i	j	k	d_{ijk}
35	1	2	1	0.174996449453226	75	0	0	5	0.0638913248785149
36	2	2	1	–0.354557981839348	76	1	0	5	–0.0199755068838777
37	3	2	1	0.299032511668555	77	2	0	5	0.00325349470408046
38	0	3	1	0.0271475151726895	78	0	1	5	–0.035310056877496
39	1	3	1	–0.0207943128584171	79	1	1	5	–0.0422031255341851
40	0	4	1	–0.0122754108107825	80	0	0	6	–0.0119398578472723

Среднеквадратическое отклонение (СКО) σ(c) по всему массиву исходных данных для уравнения II составляет 0.113 см/с, что почти на порядок меньше, чем СКО σ(c) для уравнения I, в 31 раз меньше, чем СКО σ(c) для уравнения (3), и в 18.5 раз меньше, чем СКО σ(c) для уравнения (6).

Гистограмма расчетных отклонений, приведенная в таблице 9, подтверждает нормальный закон распределения отклонений. Количество расчетных точек, в которых отклонения превышают 3 σ(c), составляет 1.63 %.

Таблица 9 – Гистограмма отклонений расчетной скорости звука для уравнения II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	см/с
<–0,4	<–0,3	<–0,2	<–0,1	<0	<0,1	<0,2	<0,3	<0,4	<+∞	Всего:
0.45213	0.61813	2.02933	8.67359	38.23693	37.15975	11.11452	1.15186	0.19994	0.36382	100 %

Графическое представление гистограммы отклонений расчетной скорости звука в морской воде по всему массиву исходных данных (895 765 точек) для уравнения II показано на рисунке 12.

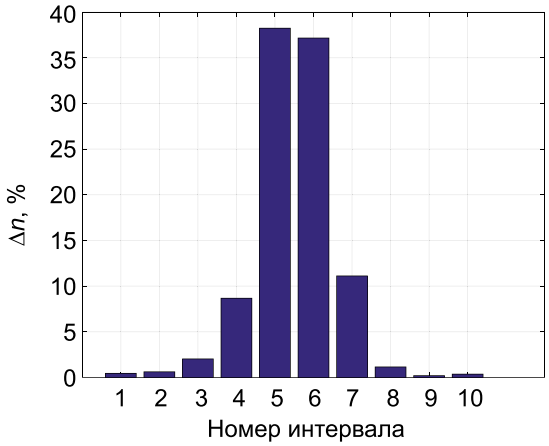


Рис. 12 – Гистограмма отклонений расчетной скорости звука для уравнения II от данных TEOS-10

На рисунках 13–16 представлен ряд показателей, также характеризующих качество аппроксимации и некоторые свойства уравнения II.

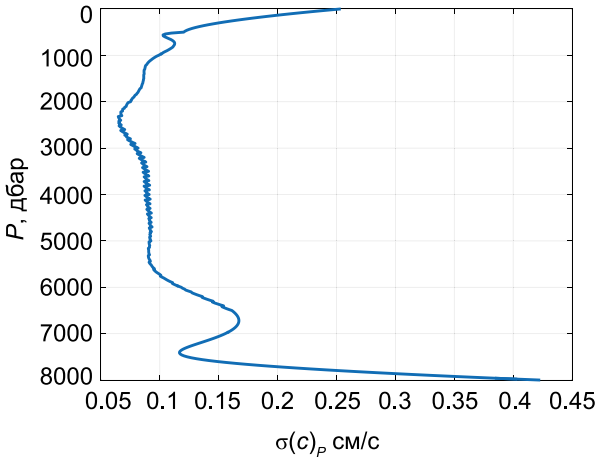


Рис. 13 – Среднеквадратические отклонения значений скорости звука, рассчитанных по уравнению II, от данных TEOS-10 в зависимости от давления

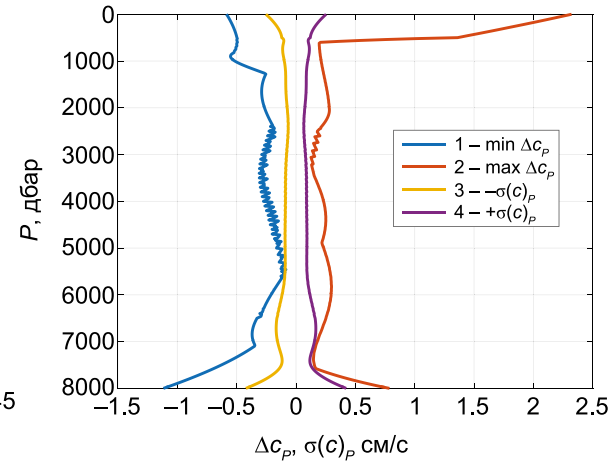


Рис. 14 – Предельные и среднеквадратические отклонения значений скорости звука, рассчитанных по уравнению II, от данных TEOS-10 в зависимости от давления

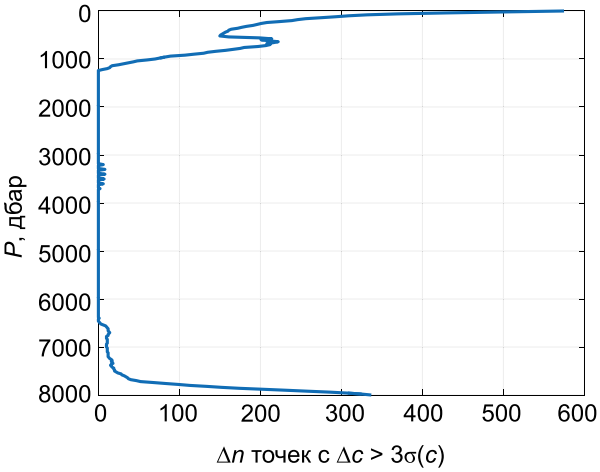


Рис. 15 – Распределение по давлению количества точек, в которых отклонения расчетных (по уравнению II) значений скорости звука от данных TEOS-10 превышают величину в 3 σ(*c*)

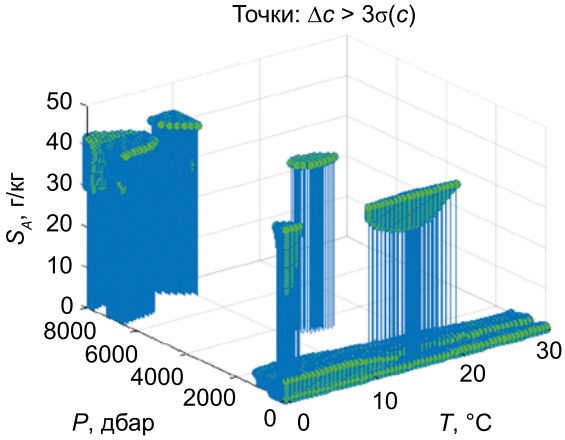


Рис. 16 – Расположение в пространстве параметров точек, в которых отклонения расчетных (по уравнению II) значений скорости звука от данных TEOS-10 превышают величину в 3σ(*c*)

Следует отметить, что уравнение II, предназначенное для применения в океанографическом диапазоне параметров, по своим статистическим характеристикам значительно превосходит упрощенное уравнение (6) из библиотеки функций и подпрограмм TEOS-10 GSW Oceanographic Toolbox (IOC et al., 2010).

Сравнение уравнений

В данном разделе выполнен сравнительный анализ быстродействия различных уравнений скорости звука для персонального компьютера и двух типов широко используемых микроконтроллеров.

Уравнения I и II в полиномиальной форме (7) были реализованы нами в виде программных кодов на языке MATLAB. Сравнение показало, что объем программных кодов для каждого из уравнений I и II является значительно меньшим (примерно в 7 раз), чем объем программных кодов, реализующих расчеты по уравнениям (3) и (6) TEOS-10 GSW Oceanographic Toolbox (IOC et al., 2010). Поскольку уравнения авторов имеют меньший объем и требуют для своего выполнения меньшего количества математических операций, то они имеют такие преимущества, как существенно меньший объем занимаемой компьютерной памяти и более высокое быстродействие (скорость счета). При этом программные коды для уравнений I и II обладают одинаковым быстродействием, так как они являются совершенно одинаковыми по структуре и отличаются лишь значениями коэффициентов: b_{ijk} – для уравнения I и d_{ijk} – для уравнения II.

При сравнении быстродействия трех различных вариантов вычисления скорости звука по уравнениям TEOS-10 (3) и (6) и по уравнению авторов (7) были определены три средних времени вычисления скорости звука на одну расчетную точку: $\tau_3(n)/n$ – по уравнению (3), $\tau_6(n)/n$ – по уравнению (6) и $\tau_7(n)/n$ – по уравнению авторов, где n – количество расчетных точек при циклических (повторяющихся в цикле) вычислениях. При этом время счета по уравнению (6) находится суммированием двух слагаемых, то есть, $\tau_6(n) = (\tau_{\text{СТ}} + \tau_{\text{УР6}})(n)$, где $\tau_{\text{СТ}}$ – время предварительного вычисления консервативной температуры (СТ), $\tau_{\text{УР6}}$ – время вычисления собственно скорости звука непосредственно по уравнению (6). Результаты затрат расчетного времени (в секундах) в среднем на одну точку при циклических расчетах для трех различных вариантов вычисления скорости звука показаны на рисунке 17.

Для сравнения быстродействия различных вариантов вычисления скорости звука с использованием уравнений (3) и (6) по отношению к уравнению (7) в качестве показателя удобно использовать безразмерное отношение (относительное время) вида $\delta_i(n) = \tau_i(n)/\tau_7(n)$. Для уравнений (3) и (6) относительное время вычисляется по отношениям $\delta_3(n) = \tau_3(n)/\tau_7(n)$ и $\delta_6(n) = \tau_6(n)/\tau_7(n)$ соответственно. Эти отношения показывают, во сколько раз быстродействие уравнений авторов превышает быстродействие вычислений по уравнениям (3) и (6) TEOS-10 соответственно при циклических расчетах (см. рисунок 18).

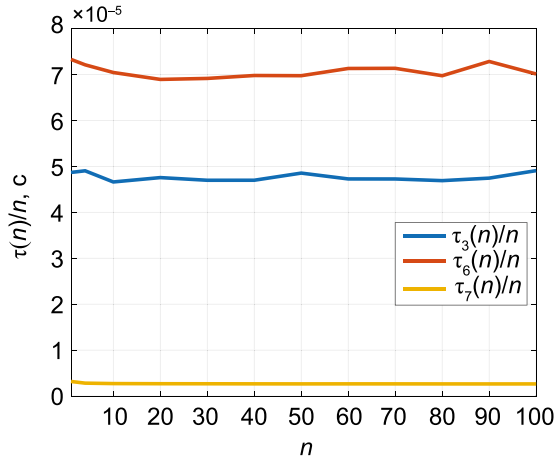


Рис. 17 – Среднее время расчета (в секундах) значения скорости звука для одной точки по уравнениям (3), (6) и (7) при циклических вычислениях

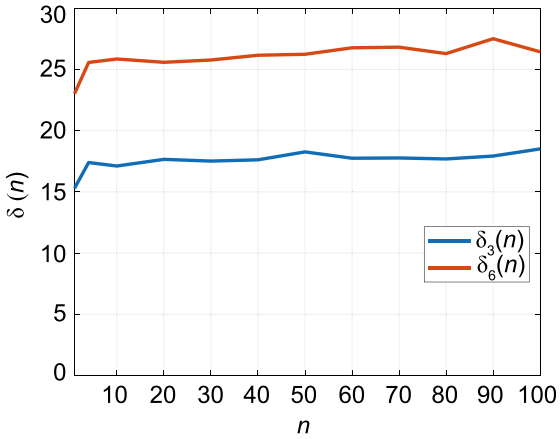


Рис. 18 – Быстродействие уравнений авторов в среднем на одну точку по сравнению с уравнением (3) – $\delta_3(n)$, и уравнением (6) – $\delta_6(n)$ при циклических вычислениях

Из рисунка 18 следует, что уравнения авторов превосходят по своему быстродействию уравнения (3) и (6) TEOS-10 при циклических вычислениях в десятки раз.

Зависимость времени расчета от размерности (N) вектора данных имеет иной характер, чем от того же количества точек (n) при циклических вычислениях. В данном случае время счета по уравнению (6) также имеет несколько иной характер и находится суммированием двух слагаемых, то есть, $\tau_6(N) = \tau_{СТ}(N)+\tau_{УР6}(N)$, где $\tau_{СТ}(N)$ – время предварительного вычисления вектора консервативной температуры (СТ), $\tau_{УР6}(N)$ – время вычисления с использованием вектора СТ непосредственно вектора скорости звука по уравнению (6). С увеличением размерности (N) вектора данных среднее время расчета на одну точку быстро снижается до некоторого уровня. Результаты затрат расчетного времени (в секундах) в зависимости от размерности вектора данных в среднем на одну точку при векторном способе расчета для трех различных вариантов вычисления скорости звука показаны на рисунке 19.

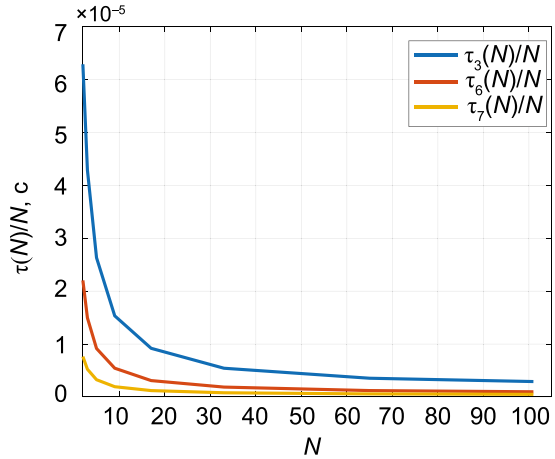


Рис. 19 – Среднее время расчета значения скорости звука для одной точки в зависимости от размерности (N) вектора данных при выполнении вычислений векторным способом по уравнениям (3), (6) и (7)

Для сравнения быстродействия различных вариантов вычисления скорости звука при векторном способе расчета в зависимости от размерности (N) вектора данных для уравнений (3) и (6) относительное время вычисляется по отношениям $\delta_3(N) = \tau_3(N)/\tau_7(N)$ и $\delta_6(N) = \tau_6(N)/\tau_7(N)$ соответственно. Эти отношения показывают во сколько раз быстродействие уравнений авторов превышает быстродействие расчетов по уравнениям (3) и (6) TEOS-10 соответственно при векторном способе вычислений (см. рисунок 20).

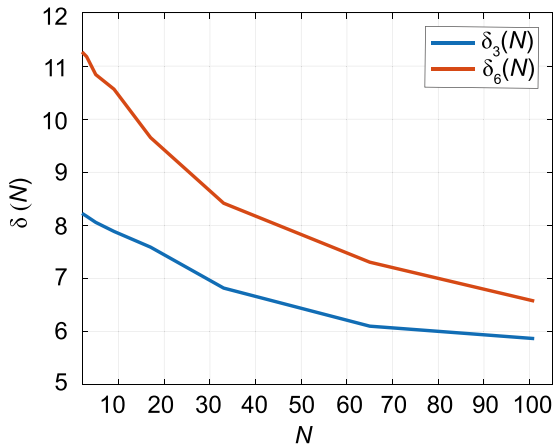


Рис. 20 – Быстродействие уравнений авторов в среднем на одну точку по сравнению с уравнением (3) – $\delta_3(N)$, и уравнением (6) – $\delta_6(N)$ при выполнении вычислений векторным способом

Из рисунка 20 следует, что уравнения авторов превосходят по своему быстродействию уравнения (3) и (6) TEOS-10 также и при векторном способе расчета, сохраняя при этом высокую точность. При увеличении размерности вектора данных быстродействие уравнения (7) несколько снижается, но остается во много раз выше по отношению к уравнениям (3) и (6).

Следует отметить, что данные для рисунков 17–20 получены с использованием обычного персонального компьютера.

Разработанные авторами уравнения (7) были также реализованы в виде программных кодов на языке C для двух популярных современных микроконтроллерных архитектур: Cortex-M0+ и Advanced RISC. Для уравнений (3) и (6) программные коды для микроконтроллеров были написаны на языке C с использованием функций из пакета Gibbs-SeaWater (GSW) Oceanographic Toolbox (GSW-C-3.05.0-4 для языка C). Для оценки эффективности алгоритмов для архитектуры Cortex-M0+ использовалась отладочная плата на базе микроконтроллера ATSAMD21J18A[1]. Это позволило получить экспериментальные оценки необходимого процессорного времени расчета при заданной точности с соответствующим энергопотреблением для различных вариантов вычисления скорости звука. С помощью этих программных кодов для уравнений (3), (6) и (7) скорость звука циклически вычислялась для 64 значений (точек).

В таблице 10 представлены результаты оценки эффективности вычислений с двойной точностью (исходные данные, коэффициенты и возвращаемые функциями результаты имеют тип double, 64 разряда).

Таблица 10 – Результаты вычислений с двойной точностью на микроконтроллере ATSAMD21J18A

Функция	Время вычисления одной точки при частоте ЦПУ 8 МГц, с	Относительное время τ_i / τ_7
Уравнение (3)	$\tau_3 = 17.4 \cdot 10^{-3}$	2.9
Уравнение (6) + предварительный расчет консервативной температуры	$\tau_6 = 24.9 \cdot 10^{-3}$	4.15
Уравнение (7)	$\tau_7 = 6.0 \cdot 10^{-3}$	1

Таким образом, время вычислений с двойной точностью для уравнения (7) в 2.9 раза меньше, чем для уравнения (3), и в 4.15 раза меньше, чем для уравнения (6) с необходимостью предварительного расчета консервативной температуры.

Компиляторы для микроконтроллеров с другой популярной архитектурой – Advanced RISC – не имеют поддержки вычислений с двойной точностью, и поэтому возможны вычисления лишь с одинарной точностью (тип float, 32 разряда). Однако этого достаточно для решаемых задач, поскольку точность измерения скорости звука не превышает 10^{-2} м/с.

Сравнивая эффективность вычислений по уравнениям (3) и (7) на микроконтроллерах с архитектурой Cortex-M0+ и Advanced RISC, исходные данные и коэффициенты были преобразованы для работы с 32-разрядным типом float.

При этом уравнение (6) из дальнейшего рассмотрения исключается, так как пересчет температуры *in situ* в консервативную температуру требует вычислений с использованием комплексного типа данных, для которых не существует встроенной поддержки в компиляторах для микроконтроллеров с архитектурой Advanced RISC.

[1] SAM D21/DA1 Family Data Sheet

В таблице 11 представлены результаты оценки эффективности вычислений с одинарной точностью (исходные данные, коэффициенты и возвращаемые результаты имеют тип float, 32 разряда).

Таблица 11 – Результаты вычислений с одинарной точностью на микроконтроллере ATSAMD21J18A

Функция	Время вычисления одной точки при частоте ЦПУ 8 МГц, с	Относительное время τ_i/τ_7
Уравнение (3)	$\tau_3 = 8.6 \cdot 10^{-3}$	2.9
Уравнение (7)	$\tau_7 = 3.0 \cdot 10^{-3}$	1

Таким образом, время вычислений с одинарной точностью для уравнения (7) также в 2.9 раза меньше, чем для уравнения (3). При этом абсолютное время вычислений с одинарной точностью примерно в 2 раза меньше по сравнению с соответствующими вычислениями с двойной точностью.

При оценке эффективности вычислений по уравнениям (3) и (7) для архитектуры Advanced RISC использовалась отладочная плата на базе микроконтроллера ATmega2560[1]. В простом цикле также вычислялись 64 значения скорости звука. В таблице 12 представлены результаты оценки эффективности вычислений с одинарной точностью (исходные данные, коэффициенты и возвращаемые результаты имеют тип float, 32 разряда).

Таблица 12 – Результаты вычислений с одинарной точностью на микроконтроллере ATmega2560

Функция	Время вычисления одной точки при частоте ЦПУ 8 МГц, с	Относительное время τ_i/τ_7
Уравнение (3)	$\tau_3 = 8.6 \cdot 10^{-3}$	3
Уравнение (7)	$\tau_7 = 2.9 \cdot 10^{-3}$	1

Время вычислений для уравнения (7) в 3 раза меньше, чем для уравнения (3), что практически совпадает с результатами, полученными для микроконтроллера ATSAMD21J18A.

Энергопотребление микроконтроллеров при частоте ЦПУ 8 МГц и напряжении питания 3.3 В следующее: для ATSAMD21J18A – не выше 1 мА, для ATmega2560 – до 7 мА. С повышением частоты энергопотребление возрастает по закону, близкому к линейному. Частоты ЦПУ микроконтроллеров можно повысить до 48 МГц и 16 Мгц соответственно.

Следует отметить, что применение уравнения (7) позволяет, в случае необходимости, существенно увеличить частоту измерения скорости звука *in situ*. В ином случае, при отсутствии необходимости проведения быстрых измерений, уравнение (7)

[1] ATmega640/1280/1281/2560/2561 - Complete Datasheet

создает условия для перевода ЦПУ микроконтроллера из активного режима в спящий режим на более длительное время, что повышает энергоэффективность измерительного канала за счет уменьшения энергопотребления.

Заключение

Выполнен анализ существующих уравнений скорости звука. Обоснована необходимость разработки более точных и компактных уравнений скорости звука для морской воды, пригодных для решения прямых и обратных расчетных задач. В прямой расчетной задаче по измеренным значениям входных параметров рассчитывается соответствующее им значение скорости звука. В обратной расчетной задаче по измеренным значениям скорости звука и каким-либо двум из трех входных параметров рассчитывается соответствующее им значение неизвестного третьего входного параметра.

Аппроксимацией данных стандартного Международного уравнения состояния TEOS-10 получены два компактных уравнения скорости звука для морской воды, позволяющие достигать высокой точности расчета при минимальных временных затратах.

В результате проведенного исследования экспериментально подтверждена более высокая эффективность разработанных уравнений с точки зрения их быстродействия, занимаемой компьютерной памяти и энергопотребления по сравнению с международными уравнениями скорости звука TEOS-10 GSW Oceanographic Toolbox (IOC et al., 2010).

Уравнение I является пригодным для расчетов в широком диапазоне параметров и может быть использовано для вычисления скорости звука аномальных, пресных и слабосоленых вод при температурах вплоть до 40 °C. Уравнение II является более точным и может быть использовано для научных расчетов в типичном океанографическом диапазоне параметров. Оба уравнения могут быть рекомендованы для включения в состав программного обеспечения мобильных морских платформ для обеспечения измерений *in situ* солености морской воды по данным измерений скорости звука, либо для обеспечения измерений *in situ* скорости звука в морской воде по данным измерений солености.

Уравнения и созданные на их основе программные коды для микроконтроллеров являются удобными инструментами для оснащения различных морских платформ и особенно быстродвижущихся подводных аппаратов. Применение этих уравнений позволит с высокой точностью выполнять измерения в реальном масштабе времени в условиях быстроменяющихся процессов в водной среде, что может быть использовано и для коррекции движения самих подводных аппаратов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПТС по теме «Разработка новых средств и измерительных информационных технологий исследований природных вод», № госрегистрации 121122300070-9.

Список литературы

1. *Греков А. Н., Греков Н. А., Сычев Е. Н.* Уравнение скорости звука для аномальных зон океанов и морей // Системы контроля окружающей среды. 2016. № 4 (24). С. 27–31.
2. *Греков А. Н., Греков Н. А., Сычев Е. Н.* Профилографы скорости звука и алгоритм определения плотности воды для океанографического диапазона // Системы контроля окружающей среды. 2017. № 8 (28). С. 11–15. https://doi.org/10.33075/2220-5861-2017-2-11-15.
3. *Греков А. Н., Греков Н. А., Сычев Е. Н.* Исследование взаимозависимости скорости звука и солености морской воды в уравнении состояния // Системы контроля окружающей среды. 2018. № 13 (33). С. 29–36. https://doi.org/10.33075/2220-5861-2018-3-29-36.
4. *Линник Ю. В*. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
5. *Allen J. T., Keen P. W., Gardiner J., Quartley M., Quartley C.* A new salinity equation for sound speed instruments // Limnology and oceanography: Methods. 2017. Vol. 15. Iss. 9. P. 810–820. https://doi.org/10.1002/lom3.10203.
6. *Belogol'skii V. A., Sekoyan S. S., Samorukova L. M., Stefanov S. R., Levtsov V. I.* Pressure dependence of the sound velocity in distilled water // Measurement Techniques. 1999. Vol. 42. No. 4. P. 406–413. https://doi.org/10.1007/bf02504405.
7. *Bilaniuk N., Wong G. S. K.* Speed of sound in pure water as a function of temperature // J. Acoust. Soc. Am. 1993. Vol. 93. No. 3. P. 1609–1612. https://doi.org/10.1121/1.406819.
8. *Chen C.-T., Millero F. J.* Precise equation of state of seawater for oceanic ranges of salinity, temperature and pressure // Deep-Sea Res. 1977. Vol. 24. Iss. 4. P. 365–369. https://doi.org/10.1016/0146-6291(77)96000-3.
9. *Coppens A. B.* Simple equations for the speed of sound in Neptunian waters // J. Acoust. Soc. Am. 1981. Vol. 69. No. 3. P. 862–863. https://doi.org/10.1121/1.385486.
10. *Del Grosso V. A.* The Velocity of Sound of Sea water at zero Depth. Naval Research Laboratory Report. 1952. No. 4002. https://doi.org/10.5962/bhl.title.39225.
11. *Del Grosso V. A.* New equation for the speed of sound in natural waters (with comparisons to other equations) // J. Acoust. Soc. Am. 1974. Vol. 56. No. 4. P. 1084–1091. https://doi.org/10.1121/1.1903388.
12. *Fofonoff N. P., Millard R. C. Jr.* Algorithms for computation of fundamental properties of seawater // UNESCO Tech. Pap. in Mar. Sci. 1983. No. 44. 54 p.
13. *Frye H. W., Pugh J. D.* A New Equation for the Speed of Sound in Seawater // J. Acoust. Soc. Am. 1971. Vol. 50. No. 1B. P. 384–386. https://doi.org/10.1121/1.1912645.
14. *Grekov A. N., Grekov N. A., Sychov E. N.* New Equations for Sea Water Density Calculation Based on Measurements of the Sound Speed // Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye. 2019. Vol. 20. No. 3. P. 143–151. https://doi.org/10.17587/mau.20.143-151.
15. IOC, SCOR and IAPSO, 2010: The international thermodynamic equation of seawater – 2010: Calculation and use of thermodynamic properties. Intergovernmental Oceanographic Commission, Manuals and Guides UNESCO (English). No. 56. 196 p. (Available from http://www.TEOS-10.org).
16. *Leroy C. C.* Development of Simple Equations for Accurate and More Realistic Calculation of the Speed of Sound in Seawater // J. Acoust. Soc. Am. 1969. Vol. 46. No. 1B. P. 216–226. https://doi.org/10.1016/0041-624x(69)90929-9.
17. *Leroy C. C., Robinson S. P., Goldsmith M. J.* A new equation for the accurate calculation of sound speed in all oceans // J. Acoust. Soc. Am. 2008. Vol. 124. No. 5. P. 2774–2782. https://doi.org/10.1121/1.2988296.
18. *Lubbers J., Graaff R.* A simple and accurate formula for the sound velocity in water // Ultrasound Med. Biol. 1998. Vol. 24. No. 7. P. 1065–1068. https://doi.org/10.1016/s0301-5629(98)00091-x.

19. *Mackenzie K. V.* Nine-term equation for the sound speed in the oceans // J. Acoust. Soc. Am. 1981. Vol. 70. No. 3. P. 807–812. https://doi.org/10.1121/1.386920.
20. *Marczak W.* Water as a standard in the measurements of speed of sound in liquids // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102. No. 5. P. 2776–2779. https://doi.org/10.1121/1.420332.
21. *Medwin H.* Speed of Sound In Water: A Simple Equation for Realistic Parameters // J. Acoust. Soc. Am. 1975. Vol. 58. No. 6. P. 1318–1319. https://doi.org/10.1121/1.380790.
22. *Wilson W. D.* Extrapolation of the Equation for the Speed of Sound in Sea Water // J. Acoust. Soc. Am. 1962. Vol. 34. No. 6. P. 866. https://doi.org/10.1121/1.1918215.
23. *Wood A. B.* A Textbook of Sound. Third Edition. Bell, London, 1955. 610 p.

Статья поступила в редакцию 05.06.2022, одобрена к печати 01.08.2022.
Для цитирования: *Греков А. Н., Греков Н. А., Сычев Е. Н., Кузьмин К. А.* Метод расчета скорости звука в морской воде для измерения быстроменяющихся океанических процессов // Океанологические исследования. 2022. Т. 50. № 2. С. 5–33. https://doi.org/10.29006/1564-2291.JOR-2022.50(2).1.

METHOD FOR CALCULATING THE SEAWATER SOUND VELOCITY TO MEASURE RAPIDLY CHANGING OCEAN PROCESSES

A. N. Grekov, N. A. Grekov, E. N. Sychov, K. A. Kuzmin

Institute of Natural and Technical Systems (IPTS),
28, Lenin street, Sevastopol, 299011, Russia,
e-mail: i@angrekov.ru

The paper presents two compact polynomial equations expressing the dependence of the sound speed of sea water on the input parameters: in situ temperature, hydrostatic pressure and absolute salinity. The equations are obtained by approximating the standard International Thermodynamic Equation of Seawater-2010 (TEOS-10). The first equation is intended to be used for the technical purposes and reproduces the TEOS-10 data on the seawater sound speed over the wide range water environment parameters with a standard deviation of 0.987 cm/s. The second, more accurate equation is for the scientific use and reproduces the TEOS-10 data on the seawater sound speed over the oceanographic range water environment parameters with a standard deviation of 0.113 cm/s. The equations can be used to solve direct and inverse computational problems. In the direct computational problem, the sound speed value is calculated from the three input parameters measured values. In the inverse computational problem, the value of an unknown input parameter is determined from the measured values of the sound speed and two other input parameters. As a result of the experiments, the higher efficiency of the developed equations was confirmed in terms of their speed, saving energy and computer memory in comparison with the use of the International Equation TEOS-10. The developed equations, algorithms and programs for microcontrollers are convenient tools to equip various offshore platforms and especially fast-moving submersibles. The application of these equations makes it possible to obtain experimental data with high accuracy, to carry out measurements in real time in a rapidly changing aquatic environment, which can also be used to correct the movement of the submersibles.

Keywords: sea water, measurements, sound speed, temperature, hydrostatic pressure, absolute salinity, equation of state, approximation, TEOS-10, microcontroller, submersibles

Acknowledgement: The work is carried out within the framework of the state task of the IPTS on the topic "Development of new tools and research of information technologies for the study of natural waters", state registration No. 121122300070-9.

References

1. Allen, J. T., P. W. Keen, J. Gardiner, M. Quartley, and C. Quartley, 2017: A new salinity equation for sound speed instruments. *Limnology and oceanography: Methods*., **15** (9), 810–820, https://doi.org/10.1002/lom3.10203.
2. Belogol'skii, V. A., S. S. Sekoyan, L. M. Samorukova, S. R. Stefanov, and V. I. Levtsov, 1999: Pressure dependence of the sound velocity in distilled water. *Measurement Techniques*, **42** (4), 406–413, https://doi.org/10.1007/bf02504405.
3. Bilaniuk, N. and G. S. K. Wong, 1993: Speed of sound in pure water as a function of temperature. *J. Acoust. Soc. Am.*, **93** (3), 1609–1612, https://doi.org/10.1121/1.406819.
4. Chen, C.-T. and F. J. Millero, 1977: Precise equation of state of seawater for oceanic ranges of salinity, temperature and pressure. *Deep-Sea Res*., **24** (4), 365–369, https://doi.org/10.1016/0146-6291(77)96000-3.
5. Coppens, A. B., 1981: Simple equations for the speed of sound in Neptunian waters. *J. Acoust. Soc. Am*., **69** (3), 862–863, https://doi.org/10.1121/1.385486.
6. Del Grosso, V. A., 1952: The Velocity of Sound on Sea water of zero Depth. *Naval Research Laboratory Report*, 4002, https://doi.org/10.5962/bhl.title.39225.
7. Del Grosso, V. A., 1974: New equation for the speed of sound in natural waters (with comparisons to other equations). *J. Acoust. Soc. Am*., **56** (4), 1084–1091, https://doi.org/10.1121/1.1903388.
8. Fofonoff, P. and R. C. Jr. Millard, 1983: Algorithms for computation of fundamental properties of seawater. *UNESCO Tech. Pap. in Mar. Sci*., 44, 54.
9. Frye, H. W. and J. D. Pugh, 1971: A New Equation for the Speed of Sound in Seawater. *J. Acoust. Soc. Am.*, **50** (1B), 384–386, https://doi.org/10.1121/1.1912645.
10. Grekov, A. N., N. A. Grekov, and E. N. Sychov, 2016: Uravneniye skorosti zvuka dlya anomal'nykh zon okeanov i morey (Sound speed equation for anomalous zones of oceans and seas). *Sistemy kontrolya okruzhayushchey sredy*, **4** (24), 27–31.
11. Grekov, A. N., N. A. Grekov, and E. N. Sychov, 2017: Profilografy skorosti zvuka i algoritm opredeleniya plotnosti vody dlya okeanograficheskogo diapazona (Sound velocity profilers and the algorithm for determining the density of water for the oceanographic range). *Sistemy kontrolya okruzhayushchey sredy*, **8** (28), 11–15, https://doi.org/10.33075/2220-5861-2017-2-11-15.
12. Grekov, A. N., N. A. Grekov, and E. N. Sychov, 2018: Issledovaniye vzaimozavisimosti skorosti zvuka i solenosti morskoy vody v uravnenii sostoyaniya (The studies of interdependence of sound velocity and marine water salinity). *Sistemy kontrolya okruzhayushchey sredy*, **13** (33), 29–36, https://doi.org/10.33075/2220-5861-2018-3-29-36.
13. Grekov, A. N., N. A. Grekov, and E. N. Sychov, 2019: New Equations for Sea Water Density Calculation Based on Measurements of the Sound Speed. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, **20** (3), 143–151, https://doi.org/10.17587/mau.20.143-151.
14. IOC, SCOR and IAPSO, 2010: *The international thermodynamic equation of seawater – 2010: Calculation and use of thermodynamic properties. Intergovernmental Oceanographic Commission, Manuals and Guides.* No. 56, UNESCO (English), 196 p. (Available from http://www.TEOS-10.org).

15. Leroy, C. C., 1969: Development of Simple Equations for Accurate and More Realistic Calculation of the Speed of Sound in Seawater. *J. Acoust. Soc. Am.,* **46 (**1B), 216–226, https://doi.org/10.1016/0041-624x(69)90929-9.
16. Leroy, C. C., S. P. Robinson, and M. J. Goldsmith, 2008: A new equation for the accurate calculation of sound speed in all oceans. *J. Acoust. Soc. Am*., **124** (5), 2774–2782, https://doi.org/10.1121/1.2988296.
17. Linnik, Yu. V., 1962: *The method of least squares and the foundations of the mathematical-statistical theory of observation processing.* Moscow, Fizmatgiz, 352.
18. Lubbers, J. and R. Graaff, 1998: A simple and accurate formula for the sound velocity in water. *Ultrasound Med. Biol*., **24** (7), 1065–1068, https://doi.org/10.1016/s0301-5629(98)00091-x.
19. Mackenzie, K. V., 1981: Nine-term equation for the sound speed in the oceans. *J. Acoust. Soc. Am*., **70** (3), 807–812, https://doi.org/10.1121/1.386920.
20. Marczak, W., 1997: Water as a standard in the measurements of speed of sound in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.,* **102** (5), 2776–2779, https://doi.org/10.1121/1.420332.
21. Medwin, H., 1975: Speed of Sound In Water: A Simple Equation for Realistic Parameters. *J. Acoust. Soc. Am.*, **58** (6), 1318–1319, https://doi.org/10.1121/1.380790.
22. Wilson, W. D., 1962: Extrapolation of the Equation for the Speed of Sound in Sea Water. *J. Acoust. Soc. Am.*, **34** (6), 866, https://doi.org/10.1121/1.1918215.
23. Wood, A. B., 1955: *A Textbook of Sound*. Third Edition. Bell, London, 610.

Submitted 05.06.2022, accepted 01.08.2022.
For citation: Grekov, A. N., N. A. Grekov, E. N. Sychov, and K. A. Kuzmin, 2022: Method for calculating the seawater sound velocity to measure rapidly changing ocean processes. *Journal of oceanological research*, **50** (2), 5–33. https://doi.org/10.29006/1564-2291.JOR-2022.50(2).1.