

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ДЛЯ УЧЕТА ОТКРЫТЫХ ГРАНИЦ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ В МОРСКИХ АКВАТОРИЯХ

Шелопут Т.О.¹, Агошков В.И.^{1,2}

¹*Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук,
Россия, 119333, Москва, ул. Губкина, д. 8,
e-mail: sheloput@phystech.edu*

²*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1.*

Статья поступила в редакцию 11.10.2021, одобрена к печати 08.12.2021.

Задачи моделирования гидротермодинамики отдельных морских акваторий и прибрежных территорий являются актуальными, поскольку результаты данного моделирования часто используются во многих приложениях. Одним из методов, позволяющих учесть открытые границы и приблизить результаты моделирования к реальным данным, является вариационная ассимиляция данных наблюдений. В настоящей работе рассматривается следующий подход: функции потоков через открытую границу считаются дополнительными неизвестными задачи; предполагается, что в заданный момент времени имеются данные наблюдений за функциями состояния акватории (температурой, соленостью, уровнем моря, скоростями). Задача рассматривается как обратная, в которой необходимо отыскать дополнительные неизвестные, такие, что выполненные уравнения модели и функции состояния акватории в некотором смысле максимально близки к данным наблюдений. Проведено сравнение методов восстановления неизвестных функций в граничных условиях на открытой границе по данным наблюдений за уровнем и скоростью в ряде численных экспериментов для области простой формы.

Ключевые слова: вариационная ассимиляция данных, моделирование морских систем, открытые границы, спутниковая альтиметрия, баротропные скорости, численные методы, обратные задачи

Введение

Одним из актуальных направлений математического моделирования в геофизической гидродинамике является моделирование открытых акваторий океанов, морей и их отдельных частей (заливов, бухт, прибрежных территорий и т.д.). Результаты такого моделирования востребованы в судоходстве, при расчете распространения загрязнений, водорослей, при оценке рисков антропогенных катастроф и в других прикладных задачах. Однако, при создании модели открытой акватории необходимо не только учитывать специфику рассматриваемого водного объекта, но и решать проблему задания граничных условий. Основная трудность в решении

данной проблемы заключается в отсутствии точной информации о потоках энергии и массы через открытые границы. В настоящей работе под открытой (жидкой) границей подразумевается участок границы моделируемого объекта, отделяющий рассматриваемую область от Мирового океана.

Существуют различные подходы к решению проблемы учета жидких границ в моделях гидротермодинамики открытых акваторий. В работах (Агошков, Залесный, Шелопут, 2020; Шелопут, 2021) представлен обзор используемых в настоящее время подходов. При наличии данных наблюдений за характеристиками акватории (температурой, уровнем и другими) можно формулировать различные алгоритмы ассимиляции данных. В работе (Edwards et al., 2015) приведен подробный обзор известных исследований по методам ассимиляции данных применительно к задачам регионального моделирования. В настоящей работе исследуется метод учета граничных условий на открытых границах, основанный на вариационной ассимиляции данных (Агошков, Залесный, Шелопут, 2020; Шелопут, 2021; Agoshkov, 2005; Дементьева, Каропова, Шайдуров, 2013). Идея метода заключается в следующем: граничные условия на открытых границах записываются с введением дополнительных неизвестных функций («граничных функций»), характеризующих влияние Мирового океана на моделируемую акваторию; формулируются и решаются обратные задачи о восстановлении дополнительных неизвестных с привлечением имеющихся данных о гидротермодинамических параметрах (данных наблюдений).

В работах (Агошков, Залесный, Шелопут, 2020; Шелопут, 2021) сформулирован класс обратных задач о восстановлении неизвестных функций в граничных условиях на открытых границах по данным наблюдений за функциями состояния акватории, в применении к модели гидротермодинамики, основанной на примитивной системе уравнений. В модели был использован метод расщепления по физическим процессам, что позволило рассматривать на каждом интервале времени вместо исходной обратной задачи для нелинейной модели более простые линейные подзадачи, привлекая соответствующие изменяющимся переменным данные наблюдений. На одном из шагов метода расщепления решается задача ассимиляции данных для линейной системы уравнений мелкой воды. В численных экспериментах из работы (Шелопут, 2018) на данном шаге метода расщепления в модели гидротермодинамики Балтийского моря, основанной на модели INMOM, применялся алгоритм вариационной ассимиляции данных об уровне моря. Результаты экспериментов показали, что даже в условиях нехватки реальных данных наблюдений, алгоритм существенно изменяет решение задачи и что его исследование и развитие в целях дальнейшего практического использования в моделях целесообразно. В настоящей работе задача ассимиляции данных для системы уравнений мелкой воды рассматривается более подробно. В частности, проводится сравнение методов восстановления граничной функции для линейной системы по данным наблюдений за уровнем и баротропными скоростями.

Данные спутниковой альтиметрии, которые являются одним из основных источников данных об уровне морской поверхности, представляют собой треки

данных о величинах, среди которых координаты, время и аномалии уровня моря. В известных алгоритмах четырехмерной вариационной ассимиляции данных спутниковой альтиметрии в правой части сопряженного уравнения возникают δ -функции Дирака, из-за чего в решении сопряженной задачи присутствуют поверхностные гравитационные волны, которые в дальнейшем приводят к искажению решения исходной задачи (Ngodock, 2016). Чтобы этого избежать, в качестве данных наблюдений можно использовать не сам уровень, а его градиент, который по физическому смыслу характеризует нормальную к треку составляющую баротропной скорости. Поэтому в настоящей работе наравне с алгоритмом ассимиляции уровня рассматривается алгоритм вариационной ассимиляции нормальной составляющей баротропной скорости, который может оказаться перспективным в приложениях.

1. Основные обозначения и постановка задачи

Уравнения модели гидротермодинамики открытой акватории и шаги метода расщепления приведены в работе (Агошков, Залесный, Шелопут, 2020). Основные обозначения повторяют использованные в работе (Агошков, Лёзина, Шелопут, 2020), приведем далее некоторые из них. Обозначим через Ω часть поверхности сферы S_R (акваторию моря); высоту поверхности моря будем задавать уравнением $z = \xi(\lambda, \theta, t)$, где (λ, θ, r) – сферические координаты, $z = R_E - r$, R_E – средний радиус Земли, $(\lambda, \theta, R_E) \in \Omega$, а t – время, $t \in [0, \bar{t}]$. Функцию рельефа дна определим как $z = H(\lambda, \theta)$ при $(\lambda, \theta, R_E) \in \Omega$, где $H(\lambda, \theta) \geq \epsilon$, $\epsilon = \text{const} > 0$. Скорость воды запишем в форме $(\vec{u}, w)^T$, где $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ – горизонтальный вектор скорости, а w – вертикальная скорость

Введем обозначения для осредненных по глубине скоростей:

$$\vec{U} \equiv ((\vec{U})_1, (\vec{U})_2)^T = \left(\frac{1}{H} \int_{\xi}^H u_1 dz, \frac{1}{H} \int_{\xi}^H u_2 dz \right)^T.$$

Пусть \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, l – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим линеаризованную задачу мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U} - g \cdot \text{grad} \xi = \vec{f} \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \text{div}(H\vec{U}) = 0 \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \vec{U} = \vec{U}_0, \quad \xi = \xi_0 \text{ в } \Omega \text{ при } t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2)^T$ – заданная функция. Задача вида решается на каждом интервале времени на шаге 3 метода расщепления в моделях (Залесный, Гусев, Агошков, 2016;

Zalesny et al., 2012; Zalesny et al., 2013). Рассмотрим граничное условие вида (Agoshkov, 2005):

$$H\vec{U} \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (0, \bar{t}), \quad (2)$$

где m_{op} – характеристическая функция внешней жидкой (открытой) границы Γ_{op} , т.е. $m_{op} = 1$ если $(\lambda, \theta, R_E) \in \Gamma_{op}$, в противном случае $m_{op} = 0$. Заметим, что на твердой части границы ($m_{op} = 0$) граничное условие принимает вид условия непротекания. Граничная функция d_s будет рассматриваться ниже как дополнительная неизвестная. Пусть для определенности $d_s = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma_{op}$.

Весь интервал времени $(0, \bar{t})$ разделяется на подынтервалы (t_{j-1}, t_j) , $\Delta t = t_j - t_{j-1}$, $t_0 = 0, t_j = \bar{t}, j = 1, \dots, J$. Запишем неявную схему аппроксимации задачи (1)–(2) на интервале (t_{j-1}, t_j) по времени. Задача (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{U}}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U} - g \cdot \text{grad} \xi = \tilde{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\Delta t} - \text{div}(H\vec{U}) = \tilde{f}_3 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{U} \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\vec{U} = \vec{U}_j, \xi = \xi_j, \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)^T = [(\tilde{f}_j)_1 + (\vec{U}_{j-1})_1 / \Delta t, (\tilde{f}_j)_2 + (\vec{U}_{j-1})_2 / \Delta t]^T, \tilde{f}_3 = \xi_{j-1} / \Delta t$.

Будем рассматривать следующие случаи:

Случай I. Пусть на интервале времени (t_{j-1}, t_j) имеются данные наблюдений ξ_{obs} вдоль Γ_{op} за уровнем моря. Введем функционал:

$$J_\alpha = J_\alpha(d_s, \xi(d_s)) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (\xi - \xi_{obs})^2 d\Gamma,$$

где $\alpha \geq 0$ – параметр регуляризации, $d_s^{(0)}$ – начальное приближение для функции d_s , полученное из каких-либо источников (можно положить $d_s^{(0)} = 0$). Сформулируем задачу вариационной ассимиляции данных: найти d_s, \vec{U}, ξ , удовлетворяющие системе уравнений (3) и доставляющие минимум функционалу $J_\alpha(d_s, \xi)$.

Случай II. Пусть имеются данные наблюдений $I_{obs} = H\vec{U} \cdot \vec{n}$ вдоль Γ_{op} . Введем функционал:

$$J_\alpha = J_\alpha(d_s, \vec{U}(d_s)) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_{op}} g \sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{op}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H\vec{U} \cdot \vec{n} - I_{obs})^2 d\Gamma.$$

Сформулируем задачу вариационной ассимиляции данных: найти d_s, \vec{U}, ξ , удовлетворяющие системе уравнений (3) и доставляющие минимум функционалу $J_\alpha(d_s, \vec{U})$.

Возможно использование и других форм записи функционалов, см., например, (Шелопут, 2021; Дементьева, Каропова, Шайдуров, 2013). Заметим, что в функционалах $J_\alpha(d_s, \xi)$, $J_\alpha(d_s, \vec{U})$ под знаками интегралов стоят весовые функции \sqrt{gH} , $\sqrt{\frac{g}{H}}$,

причем H в реальных задачах может значительно изменяться вдоль открытой границы. В этом случае данным наблюдений присваиваются различные веса на мелководье и на глубине. Вид функционалов является следствием используемых в математических постановках метрик. При использовании других метрик вид функционалов изменится, что может повлиять на результаты численных экспериментов.

Вопрос о доступности данных наблюдений, которые используются в постановках задач для случаев I и II, заслуживает отдельного внимания. Подробное обсуждение этого вопроса имеется в работе (Шелопут, 2018), где рассмотрены данные об уровне, а также в работе (Агошков, Лёзина, Шелопут, 2020), где рассмотрены способы получения данных о скорости. Приведем здесь некоторые замечания, которые могут иметь значение для анализа применимости результатов данной статьи. На практике доступны следующие массивы данных наблюдений, из которых можно получить данные об уровне моря – данные спутниковой альтиметрии и данные измерений «in situ» с ровнемерных постов. На сайте <https://marine.copernicus.eu/> представлены 2 набора данных спутниковой альтиметрии – обработанные данные по трекам спутников (i) и результат применения метода оптимальной интерполяции для построения уровня на сетке (ii). Данные (ii) являются достаточно грубыми и не могут быть использованы в качестве ξ_{obs} в задачах регионального моделирования. Данные (i) с метеорологических спутников, оснащенных измерительным оборудованием, представляют собой треки данных о величинах: координате, времени и уровне. Повторяются ли траектории движения спутников или нет, зависит от типа спутника – некоторые траектории повторяются с периодом порядка 15–30 суток, некоторые не повторяются, также существуют и геостационарные метеорологические спутники. Данные со спутников проходят несколько этапов обработки (фильтрацию длинных волн, коррекцию полей в областях пересечения траекторий и т.д. (Лебедев, 2016) и попадают в открытый доступ. Из всего массива данных спутниковой альтиметрии в качестве ξ_{obs} могут быть использованы только те, которые являются измерениями на открытой границе. Данные наблюдений вида I_{obs} , безусловно, на практике являются менее доступными. Эти данные могут быть получены разными способами. Один из подходов основан на использовании данных наблюдений со спутников и дрейфующих буев. При наличии данных с буев может быть оценено трехмерное поле плотности, а по данным со спутников может быть оценена перпендикулярная траектории спутника баротропная поправка к скорости. Далее может быть использована схема подсчета, описанная в работе (Мысленков, 2011). Недостатки данного подхода в применении к проблеме жидких границ очевидны: оценки для скоростей получаются грубыми, и их можно получить только там, где проводятся частые

измерения с буев и где проходят треки специализированных спутников. Заметим, что приближенные значения как скоростей, так и уровня, можно получить и из расчетов по моделям акваторий бóльшего размера. Ассимиляция таких данных может оказаться более гибким и обоснованным инструментом, чем их непосредственная подстановка в граничные условия, что обсуждается в работе (Шелопут, 2021).

2. Алгоритмы решения задачи

Задачу минимизации функционала J_α можно решать, например, с помощью метода градиентного спуска. Для того, чтобы выразить градиент функционала и необходимое условие оптимальности, вводится сопряженная задача (Шелопут, 2021). Алгоритм решения задачи для случая I можно записать в следующем виде:

Пусть найдено d_s^k . Решаем прямую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{U}^k}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U}^k - g \cdot \text{grad} \xi^k = \vec{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^k}{\Delta t} - \text{div}(H\vec{U}^k) = \tilde{f}_3 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{U}^k \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi^k = m_{op} \sqrt{gH} d_s^k \text{ на } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4)$$

Решаем сопряженную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{U}^{*,k}}{\Delta t} - \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U}^{*,k} + g \cdot \text{grad} \xi^{*,k} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^{*,k}}{\Delta t} + \text{div}(H\vec{U}^{*,k}) = 0 \text{ в } \Omega, \\ -H\vec{U}^{*,k} \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi^{*,k} = m_{op} \sqrt{gH} (\xi^k - \xi_{obs}) \text{ на } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5)$$

Ищем новое приближение d_s^{k+1} :

$$d_s^{k+1} = d_s^k - \tau_k m_{op} (\alpha (d_s^k - d_s^{(0)}) + \xi^{*,k}), \quad (6)$$

$$\tau_k \equiv \frac{1/2 \int_{\partial\Omega} m_{op} \sqrt{gH} (\xi^k - \xi_{obs})^2 d\Gamma}{\int_{\partial\Omega} m_{op} \sqrt{gH} (\xi^{*,k})^2 d\Gamma}, \quad (7)$$

где k – номер итерации. Итерационный процесс (4)–(6) сходится при $\forall \alpha > 0$ и достаточно малом $\tau_k = \tau = \text{const} > 0$. Для увеличения скорости сходимости параметр

итерационного процесса можно вычислять, пользуясь формулой (7) (см. Агошков, 2016; Васильев, 1981).

Аналогично тому, как это сделано в случае I, в случае II так же можно вычислить градиент и необходимое условие минимума функционала $J_\alpha(d_s, \vec{U})$. Пользуясь полученными выражениями, можно записать метод градиентного спуска, с помощью которого можно отыскать приближения к функциям $\vec{U}(\alpha)$, $d_s(\alpha)$, доставляющим минимум функционалу $J_\alpha(d_s, \vec{U})$ при некотором малом $\alpha > 0$:

Пусть найдено d_s^k . Решаем задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{U}^k}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U}^k - g \cdot \text{grad} \xi^k = \tilde{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^k}{\Delta t} - \text{div}(H\vec{U}^k) = \tilde{f}_3 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{U}^k \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi^k = m_{op} \sqrt{gH} d_s^k \text{ на } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (8)$$

Решаем сопряженную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{U}^{*,k}}{\Delta t} - \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U}^{*,k} + g \cdot \text{grad} \xi^{*,k} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^{*,k}}{\Delta t} + \text{div}(H\vec{U}^{*,k}) = 0 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{U}^{*,k} \cdot \vec{n} - m_{op} \sqrt{gH} \xi^{*,k} = m_{op} (H\vec{U}^k \cdot \vec{n} - I_{obs}) \text{ на } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (9)$$

Ищем новое приближение d_s^{k+1} :

$$d_s^{k+1} = d_s^k - \tau_k \left(\alpha \sqrt{gH} (d_s^k - d_s^{(0)}) + H\vec{U}^{*,k} \cdot \vec{n} \right) \text{ на } \Gamma_{op}, \quad (10)$$

$$\tau_k \cong \frac{1/2 \int_{\partial\Omega} m_{op} \sqrt{g/H} (H\vec{U}^k \cdot \vec{n} - I_{obs})^2 d\Gamma}{\int_{\partial\Omega} m_{op} g (H\vec{U}^{*,k} \cdot \vec{n})^2 d\Gamma}. \quad (11)$$

При выполнении подходящего критерия окончания итерационного процесса элементы d_s^k , ξ^k , \vec{U}^k принимаются в качестве приближенных решений рассматриваемой задачи в Ω . Подходящий критерий остановки следует выбирать в зависимости от параметров итерационного алгоритма, размера моделируемой области, численного метода и заданной точности. Алгоритм (8)–(10) сходится при достаточно малом параметре $\tau_k = \tau = \text{const} > 0$ (Агошков, 2016), однако, его сходимость можно ускорить, задав τ_k по формуле (11). Заметим, что параметр τ_k является размерным.

3. Результаты численных экспериментов

Был проведен предварительный расчет на $\bar{t} = 6$ часов в исходной области, которая представляла собой квадрат $L \times L$, где $L = 300$ км. Начальные условия задавались следующим образом:

$$\xi(t = t_0) = \frac{L}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$(\bar{U})_1(t = t_0) = -\frac{g}{l} \frac{y-y_c}{\sigma^2} \xi(t = t_0),$$

$$(\bar{U})_2(t = t_0) = \frac{g}{l} \frac{x-x_c}{\sigma^2} \xi(t = t_0).$$

Для расчета были выбраны следующие значения параметров: $x_c = 0,45L$, $y_c = 0,5L$, $\sigma = 0,05L$, $\vec{f} = 0$, $R_f = 0$, $g = 9,81$ см/с², $l = 3 \cdot 10^{-4}$ 1/с. Заметим, что если в данном случае принять $H(x, y) = \text{const}$, то ξ , \bar{U} останутся неизменными на протяжении всего расчета. Начальные условия имитируют некоторый «вихрь» с центром в точке (x_c, y_c) . Для аппроксимации задачи по пространству была введена равномерная сетка 100×100 точек. Шаг по времени был выбран как $\Delta t = 54$ с. Для аппроксимации краевых задач по пространству был использован метод конечных разностей 2-го порядка на сетке типа «С» по классификации Аракавы. Топография дна задавалась для точки (x_i, y_j) сетки по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \text{если } y_j < y_c - 3\sigma, \text{ то } H(x_i, y_j) &= H_0, \\ \text{если } y_j < y_c + 3\sigma, \text{ то } H(x_i, y_j) &= H_0(1 + \beta[y_j - (y_c - 3\sigma)]), \\ \text{если } y_j \geq y_c + 3\sigma, \text{ то } H(x_i, y_j) &= H_0(1 + 6\beta\sigma). \end{aligned}$$

где $\beta = 15/(6\sigma)$. Результаты предварительного расчета ξ_p , \bar{U}_p были сохранены и использовались в дальнейшем в качестве референтных, «точных», и для задания данных наблюдений. Дальнейшие расчеты проводились в правой половине области $\Omega^{1/2} = (L/2, L) \times (0, L)$, за жидкую границу принималась $\Gamma_{op} = L/2 \times (0, L)$. По результатам предварительного расчета были заданы функции наблюдений $I_{obs} = H(\bar{U}_p \cdot \vec{n})$, $\xi_{obs} = \xi_p$ на Γ_{op} .

Для сравнения были проведены расчеты в области $\Omega^{1/2}$ на те же $\bar{t} = 6$ часов, причем в Расчете I для учета открытой границы Γ_{op} был использован алгоритм (4)–(6), а в Расчете II был использован алгоритм (8)–(10). В Расчетах I, II ассимиляция производилась на каждом шаге по времени, начиная с первого шага. Был выбран следующий критерий остановки: итерационный алгоритм завершался, как только функционал на следующей итерации оказывался больше, чем на предыдущей, при этом значения граничной функции брались с предыдущей итерации. Параметр регуляризации был задан как $\alpha = 10^{-5}$.

Похожий твин-эксперимент был проведен в разделе 3.2 работы (Шелопут, 2021), однако условия эксперимента принципиально различаются. В эксперименте

из работы (Шелопут, 2021) параметр Кориолиса был нулевым, дно – плоским, а правая часть, характеризующая атмосферное воздействие – ненулевой. В настоящей работе $l \neq 0$, $\vec{f} = 0$, а изменение решения во времени происходит из-за наличия значительного градиента в функции рельефа дна. Также, в отличие от работ (Шелопут, 2021; Агошков, Лёзина, Шелопут, 2020), в экспериментах, результаты которых представлены ниже, параметры водного бассейна максимально близки к параметрам реальной морской акватории, тогда как в (Шелопут, 2021; Агошков, Лёзина, Шелопут, 2020) основной целью была проверка доказанных теорем сходимости, выбор параметров регуляризации в экспериментах с шумом в данных.

На рис. 1а представлен уровень моря ξ_p по результатам предварительного расчета на момент времени 5 ч 30 мин от начала расчета, на рис. 1в – уровень моря по результатам Расчета I для того же момента времени, на рис. 1г – уровень моря по результатам Расчета II. Эти распределения можно сравнить с представленным на рис. 1б уровнем моря по результатам расчета без ассимиляции. Из рисунков видно, что алгоритмы решения задачи для случаев I, II качественно воспроизводят уровень моря, полученный в референтном расчете. Тем не менее, для сравнения алгоритмов требуется дать количественную оценку их эффективности. Были введены следующие величины:

$$diff_{\xi} = \frac{1}{mes(\Omega^{1/2})} \int_{\Omega^{1/2}} (\xi - \xi_p)^2 d\Omega, \quad (15)$$

$$diff_{(\vec{U})_1} = \frac{1}{mes(\Omega^{1/2})} \int_{\Omega^{1/2}} [(\vec{U})_1 - (\vec{U}_p)_1]^2 d\Omega. \quad (16)$$

Подсчет интегралов в формулах (15), (16) производился на сетке по методу прямоугольников, а в качестве ξ , \vec{U} , ξ_p , \vec{U}_p выступали соответствующие сеточные функции.

На рис. 2а представлена зависимость величины $diff_{\xi}$ от времени для расчета без ассимиляции (сплошная линия), Расчета I (точки) и Расчета II (пунктир), а на рис. 2б – зависимость величины $diff_{(\vec{U})_1}$ от времени для расчета без ассимиляции (сплошная линия), Расчета I (точки) и Расчета II (пунктир). Из рисунков видно, что при использовании ассимиляции на каждом шаге по времени в случаях I, II средняя ошибка на 2 порядка меньше, чем при расчете без ассимиляции, более того, расчет с ассимиляцией уровня дает лучший результат.

В реальных практических задачах имеются две существенных особенности, которые не учтены в Расчетах I, II. Во-первых, реальные данные наблюдений имеются далеко не в каждый момент времени. Во-вторых, в реальных данных имеются ошибки, в том числе, может присутствовать «шум». Для сравнения были проведены Расчеты III, IV в области $\Omega^{1/2}$ на те же $\bar{t} = 6$ часов, причем в Расчете III для учета открытой границы Γ_{op} был использован алгоритм (4)–(6), а в Расчете IV был использован алгоритм (8)–(10). В отличие от Расчетов I, II ассимиляция производилась на каждом втором шаге по времени, начиная с первого шага. Критерий остановки был выбран таким же, как и в Расчетых I, II.

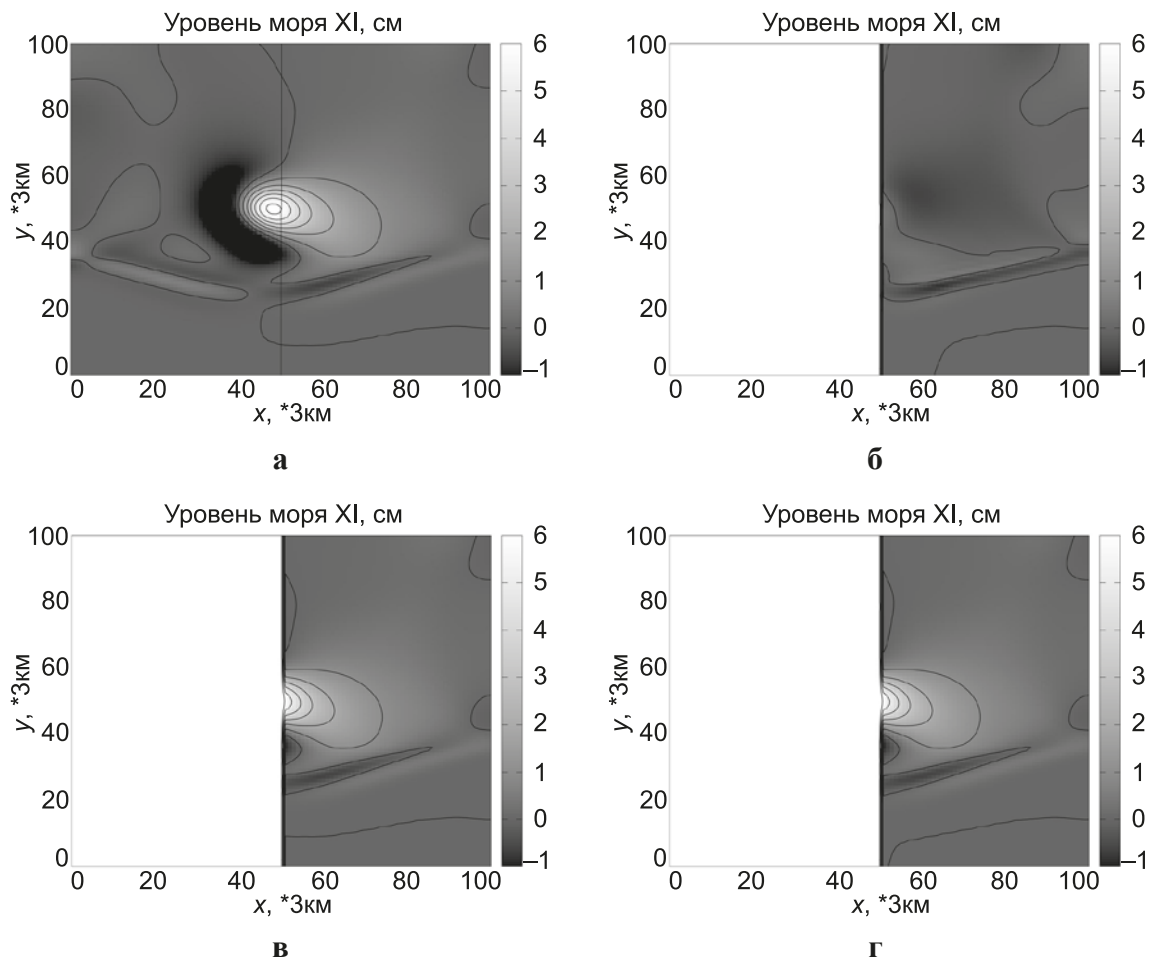


Рис. 1. Значения уровня моря (см) на жидкой границе для $t = 5$ ч 30 мин; **а** – предварительный расчет; **б** – расчет без ассимиляции; **в** – расчет с использованием ассимиляции уровня (Расчет I); **г** – расчет с использованием ассимиляции скорости (Расчет II)

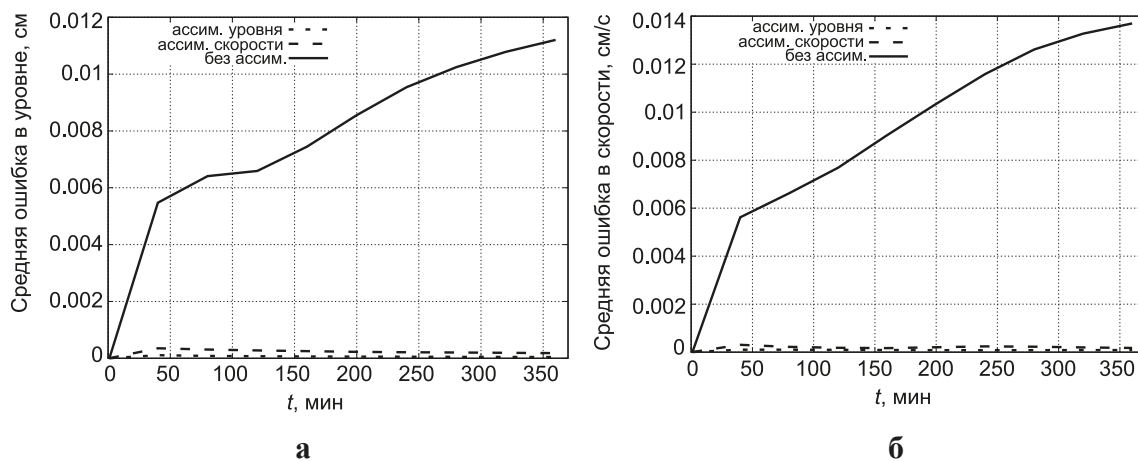


Рис. 2. Зависимость величин $diff$ от времени (сплошная линия – расчет без ассимиляции; точки – Расчет I; пунктир – Расчет II); **а** – зависимость $diff_{\xi}^{\bar{u}}(t)$; **б** – зависимость $diff_{(\bar{v})_1}(t)$

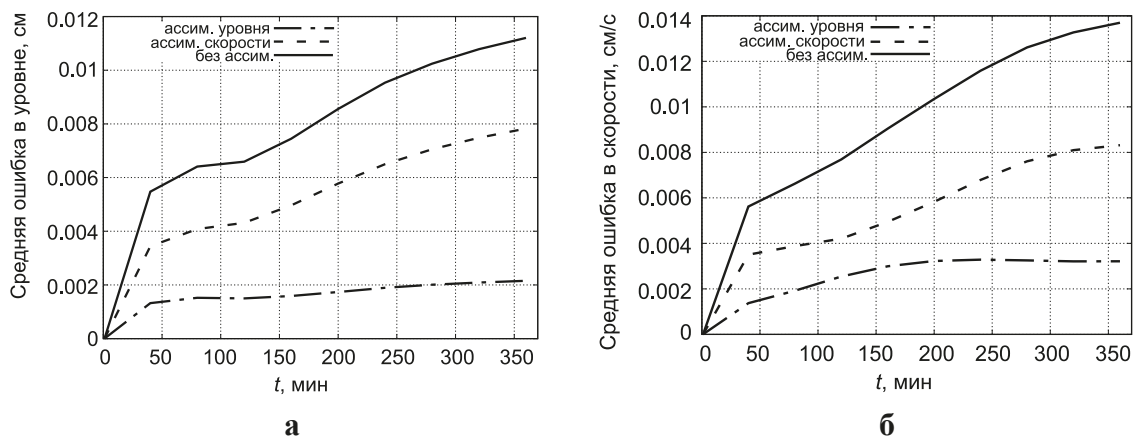


Рис. 3. Зависимость величин $diff$ от времени (сплошная линия – расчет без ассимиляции; штрих-пунктир – Расчет III; пунктир – Расчет IV);
а – зависимость $diff_{\xi}(t)$; **б** – зависимость $diff_{(\bar{v})_1}(t)$

На рис. 3а представлена зависимость величины $diff_{\xi}$ от времени для расчета без ассимиляции (сплошная линия), Расчета III (штрих-пунктир) и Расчета IV (пунктир), а на рис. 3б – зависимость величины $diff_{(\bar{v})_1}$ от времени для расчета без ассимиляции (сплошная линия), Расчета III (штрих-пунктир) и Расчета IV (пунктир). Из рисунков видно, что при использовании ассимиляции на каждом втором шаге по времени ошибка значительно выше, чем в Расчеты I, II, тем не менее, расчет с ассимиляцией уровня по-прежнему дает лучший результат.

На рис. 4а, б представлены значения уровня моря ξ (см) и первого компонента скорости (см/с), соответственно на жидкой границе для $t = 45$ мин по результатам Расчета III, а на рис. 4в, г – значения уровня моря ξ (см) и первого компонента скорости \bar{U} (см/с), соответственно на жидкой границе для $t = 45$ мин по результатам расчета IV. На рис. 4а–г сплошной линией обозначены результаты предварительного расчета, пунктиром – результаты расчета без ассимиляции, штрих-пунктиром или точками – результаты Расчеты III, IV на последней итерации.

В случае, когда данные наблюдений содержат «шум», можно использовать дополнительную регуляризацию, так, как это сделано в Главе 3 работы (Шелопут, 2021) и в работе (Дементьева, Каропова, Шайдуров, 2013). В работе (Шелопут, 2021) было показано, что в эксперименте с «зашумленными» данными метод восстановления граничной функции по данным о скорости показал лучшее соответствие с точным решением, чем метод восстановления граничной функции по данным об уровне. Однако, заметим, что в численном эксперименте из работы (Шелопут, 2021) пространственный масштаб был на 3 порядка меньше, глубина была постоянна и параметр Кориолиса был нулевым. В настоящей работе также был проведен эксперимент с «шумом»: был «сгенерирован» шум $N(y)$ (математическое ожидание 0, дисперсия 0,1), а потом один и тот же шум был применен к данным наблюдений по правилу $I_{obs} = I_{obs}(1 + N)$, $\xi_{obs} = \xi_{obs}(1 + N)$. Ассимиляция производилась каждые 5 шагов по времени, начиная с 50-го шага. На рис. 5а, б представлены зависимости величин $diff_{\xi}$, $diff_{(\bar{v})_1}$ от времени для расчета без ассимиляции (сплошная линия), расчета с ассимиляцией зашумленных данных об уровне (штрих-пунктир) и расче-

та с ассимиляцией зашумленных данных о скорости (пунктир). Из рисунков видно, что в данном эксперименте результат с ассимиляцией данных об уровне в среднем несколько лучше, чем при использовании ассимиляции данных о скорости.

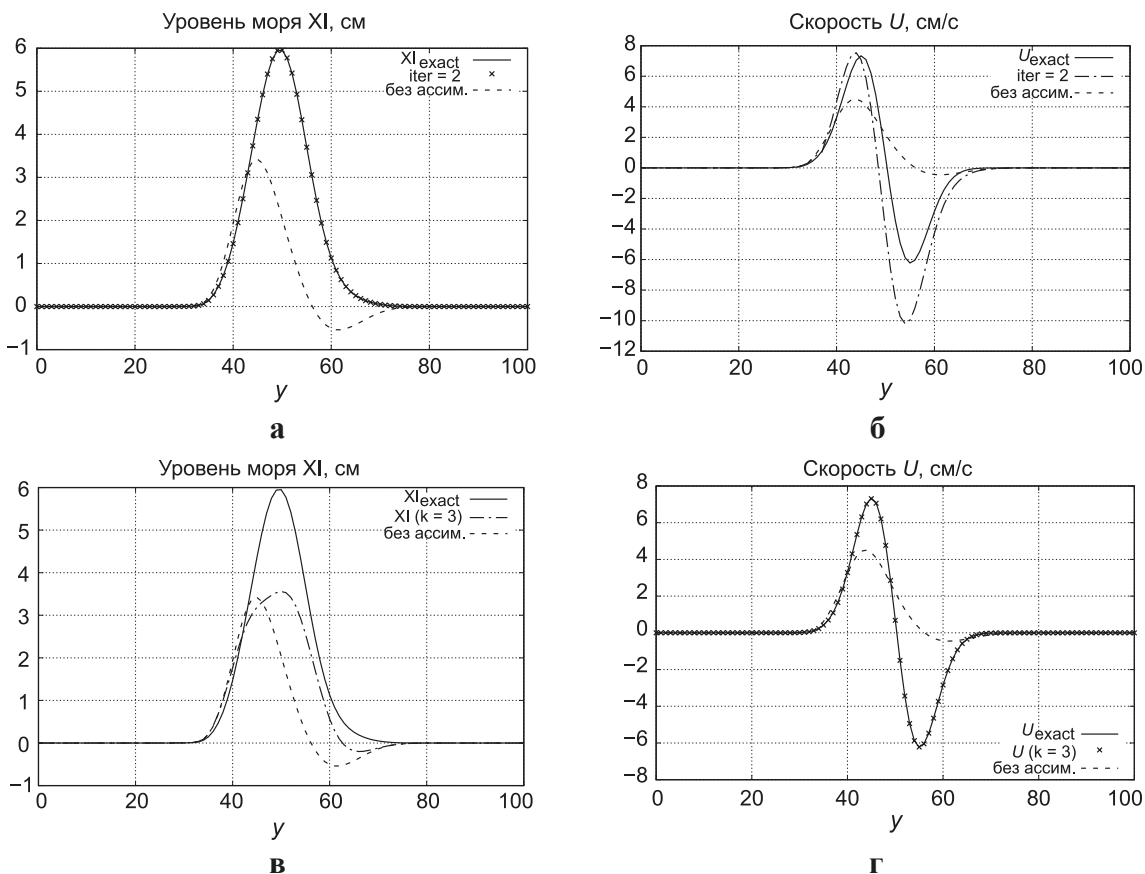


Рис. 4. **а** – значения уровня моря ξ (см) на жидкой границе для $t = 45$ мин для Расчета III; **б** – значения скорости $(\vec{U})_1$ (см/с) на жидкой границе для $t = 45$ мин для для Расчета III; **в** – значения уровня моря ξ (см) на жидкой границе для $t = 45$ мин для Расчета IV; **г** – значения скорости $(\vec{U})_1$ (см/с) на жидкой границе для $t = 45$ мин для Расчета IV. Сплошная линия – предварительный расчет; пунктир – расчет без ассимиляции; штрих-пунктир/точки – результаты Расчетов III, IV на последней итерации

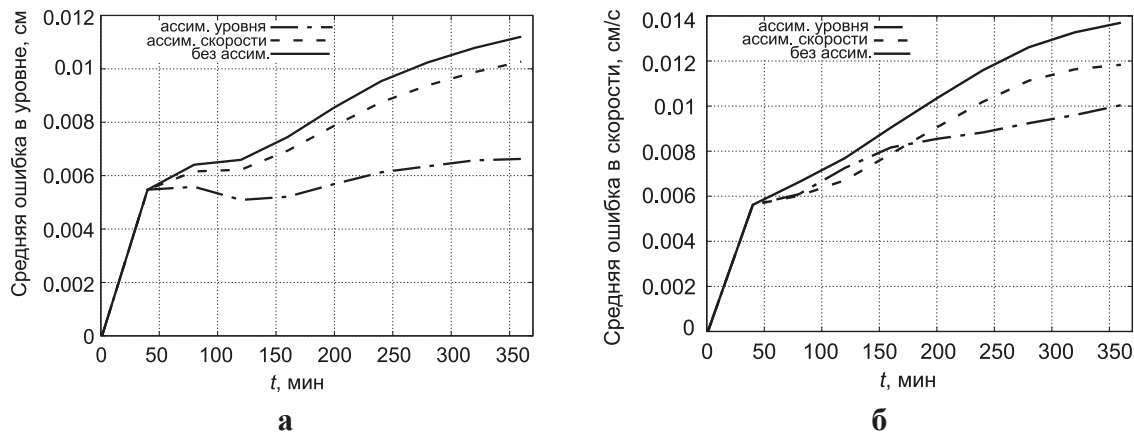


Рис. 5. Зависимость величин $diff$ от времени (сплошная линия – расчет без ассимиляции; штрих-пунктир – ассимиляция зашумленных данных об уровне; пунктир – ассимиляция зашумленных данных о скорости); **а** – зависимость $diff_{\xi}(t)$; **б** – зависимость $diff_{(\vec{U})_1}(t)$

Заключение

Таким образом, в данной работе была рассмотрена задача о восстановлении неизвестной функции в граничном условии на открытой границе для линейризованной системы уравнений мелкой воды. Были сформулированы два алгоритма восстановления неизвестной функции с использованием ассимиляции данных об уровне и скорости. Было проведено сравнение алгоритмов в тестовом численном твин-эксперименте. По результатам эксперимента метод восстановления граничной функции по данным об уровне показал лучшее соответствие с точным решением, чем метод восстановления граничной функции по данным о скорости. При этом результаты численных экспериментов, полученные в настоящей работе, не противоречат полученным в работе (Шелопут, 2021), поскольку условия и параметры экспериментов принципиально различны. Автор предполагает, что на результаты экспериментов этой работы особенно значимое влияние оказало наличие большого градиента в функции глубины $H(x, y)$ в области, где значения \vec{U} и ξ менялись наиболее интенсивно. Глубина моря H входит в функционалы $J_\alpha(d_s, \vec{U})$, $J_\alpha(d_s, \xi)$, поэтому она играет роль «весовой» функции. Возможно, для случаев с большими перепадами глубины моря на открытой границе требуется переформулировать функционал $J_\alpha(d_s, \vec{U})$, для того, чтобы алгоритм ассимиляции данных о скорости работал более эффективно.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-01-00595).

Литература

- Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2016. 244 с.
- Агошков В.И. Методы решения обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в проблемах крупномасштабной динамики океанов и морей. М.: ИВМ РАН, 2016. 192 с.
- Агошков В.И., Залесный В.Б., Шелопут Т.О. Вариационная ассимиляция данных в задачах моделирования гидрофизических полей в открытых акваториях // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 3. С. 293–308.
- Агошков В.И., Лёзина Н.Р., Шелопут Т.О. Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче гидродинамики открытой акватории // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1915–1932.
- Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 552 с.
- Дементьева Е.В., Карпова Е.Д., Шайдуров В.В. Восстановление граничной функции по данным наблюдений для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 1. С. 10–20.
- Залесный В.Б., Гусев А.В., Агошков В.И. Моделирование циркуляции Черного моря с высоким разрешением прибрежной зоны // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52. № 3. С. 316–333.

- Лебедев С.А.* Методика обработки данных спутниковой альтиметрии для акваторий Белого, Баренцева и Карского морей // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2016. Т. 13. № 6. С. 203–223.
- Мысленков С.А.* Использование спутниковой альтиметрии для расчета переноса вод в Северной Атлантике // Труды Гидрометцентра России. 2011. № 345. С. 119–125.
- Шелопут Т.О.* Исследование и решение обратных задач в проблемах моделирования гидрофизических полей в акваториях с жидкими границами: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2021. 128 с.
- Шелопут Т. О.* Численное решение задачи вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой (открытой) границе в модели гидротермодинамики Балтийского моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2018. Т. 15. №. 7. С. 15–23.
- Agoshkov V.I.* Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2005. Vol. 20. No. 1. P. 1–18. <https://doi.org/10.1515/1569398053270813>.
- Agoshkov V.I.* Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with ‘liquid’ boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. Vol. 32. No. 2. P. 73–90. <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0007>.
- Agoshkov V.I., Sheloput T.O.* The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with ‘liquid’ boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. Vol. 32. No. 3. P. 147–164. <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0013>.
- Edwards C.A., Moore A.M., Hoteit I., Cornuelle B.D.* Regional ocean data assimilation // Annual review of marine science. 2015. Vol. 7. No. 1. P. 21–42. <https://doi.org/10.1146/annurev-marine-010814-015821>.
- Ngodock H., Carrier M., Souopgui I., Smith S., Martin P., Muscarella P., Jacobs G.* On the direct assimilation of along-track sea-surface height observations into a free-surface ocean model using a weak constraints four-dimensional variational (4D-Var) method // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2016. Vol. 142. No. 695. P. 1160–1170. <https://doi.org/10.1002/qj.2721>.
- Zalesny V.B., Diansky N.A., Fomin V.V., Moshonkin S.N., Demyshev S.G.* Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27. No. 1. P. 95–112. <https://doi.org/10.1515/rnam-2012-0006>.
- Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., Aps R.* Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2013. Vol. 28. No. 1. P. 85–100. <https://doi.org/10.1515/rnam-2013-0006>.

COMPARISON OF TWO DATA ASSIMILATION METHODS USED TO ACCOUNT FOR OPEN BOUNDARIES IN SEA AREA HYDROTHERMODYNAMICS MODELING

Sheloput T.O.¹, Agoshkov V.I.^{1,2}

¹*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8, Gubkin str., Moscow, 119333, Russia,
e-mail: sheloput@phystech.edu*

²*Lomonosov Moscow State University,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,*

Submitted 11.10.2021, accepted 08.12.2021.

The problems of modeling hydrothermodynamics of particular sea and coastal areas are of current interest, since the results of this modeling are often used in many applications. One of the methods allowing to take into account open boundaries and bring the simulation results closer to real data is the variational assimilation of observational data. In this paper the following approach is considered: it is supposed that there are observational data at a certain moment in time; the problem is considered as an inverse problem, in which the functions of fluxes across the open boundary are treated as additional unknowns. Comparison of methods for reconstructing unknown functions in boundary conditions at an open boundary using sea level and velocity observational data in a number of numerical experiments for a region of a simple shape is carried out.

Keywords: variational data assimilation, modeling of marine systems, open boundaries, satellite altimetry, barotropic velocities, numerical methods, inverse problems

Acknowledgement: The work was supported by an RFBR grant No. 19-01-00595.

References

- Agoshkov, V.I., 2005: Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model*, **20**(1), 1–18, <https://doi.org/10.1515/1569398053270813>.
- Agoshkov, V.I., 2016: *Metody optimal'nogo upravleniya i sopryazhennyh uravnenij v zadachah matematicheskoy fiziki*. Moscow, INM RAS, 244 p.
- Agoshkov, V.I., 2016: *Metody resheniya obratnyh zadach i zadach variacionnoj assimilyacii dannyh nablyudenij v problemah krupnomasshtabnoj dinamiki okeanov i morej*. Moscow, INM RAS, 192 p.
- Agoshkov, V.I., 2017: Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with 'liquid' boundaries. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model*, **32**(2), 73–90, <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0007>.
- Agoshkov, V.I., V.B. Zalesny, and T.O. Sheloput, 2020: Variational Data Assimilation in Problems of Modeling Hydrophysical Fields in Open Water Areas. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **56**(3), 253–267, <https://doi.org/10.1134/S0001433820030020>.
- Agoshkov, V.I., N.R. Lezina, and T.O. Sheloput, 2020: Recovery of Boundary Functions

- on External and Internal Open Boundaries in an Open Sea Hydrodynamic Problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **60**(11), 1855–1871, <https://doi.org/10.1134/S0965542520110019>.
- Agoshkov, V.I. and T.O. Sheloput, 2017: The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with ‘liquid’ boundaries. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model*, **32**(3), 147–164, <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0013>.
- Dement’eva, E.V., E.D. Karepova, and V.V. Shajdurov, 2013: Vosstanovlenie granichnoj funkicii po dannym nablyudenij dlya zadachi rasprostraneniya poverhnostnyh voln v akvatorii s otkrytoj granicej. *Sibirskij zhurnal industrial’noj matematik*, **16**(1), 10–20.
- Edwards, C.A., A.M. Moore, I. Hoteit, and B.D. Cornuelle, 2015: Regional ocean data assimilation. *Annual review of marine science*, **7**(1), 21–42, <https://doi.org/10.1146/annurev-marine-010814-015821>.
- Lebedev, S.A., 2016: Metodika obrabotki dannyh sputnikovoj al’timetrii dlya akvatorij Belogo, Barenceva i Karskogo morej. *Sovremennye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, **13**(6), 203–223.
- Myslenkov, S.A., 2011: Ispol’zovanie sputnikovoj al’timetrii dlya rascheta perenosa vod v Severnoj Atlantike. *Trudy Gidrometcentra Rossii*, **345**, 119–125.
- Ngodock, H., M. Carrier, I. Souopgui, S. Smith, P. Martin, P. Muscarella, and G. Jacobs, 2016: On the direct assimilation of along-track sea-surface height observations into a free-surface ocean model using a weak constraints four-dimensional variational (4D-Var) method. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **142**(695), 1160–1170, <https://doi.org/10.1002/qj.2721>.
- Sheloput, T.O., 2021: *Issledovanie i reshenie obratnyh zadach v problemah modelirovaniya gidrofizicheskikh polej v akvatoriyah s zhidkimi granicami: Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18*. Moscow, 128 p.
- Speloput, T.O., 2018: Chislennoe reshenie zadachi variacionnoj assimilyacii dannyh ob urovne na zhidkoj (otkrytoj) granice v modeli gidrotermodynamiki Baltijskogo morya // *Sovremennye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, **15**(7), 15–23.
- Vasil’ev, F.P., 1981: *Metody resheniya ekstremal’nyh zadach*. Moscow, Nauka, 552 p.
- Zalesny, V.B., N.A. Diansky, V.V. Fomin, S.N. Moshonkin, and S.G. Demyshev, 2012: Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, **27**(1), P. 95–112, <https://doi.org/10.1515/rnam-2012-0006>.
- Zalesnyi, V.B., A.V. Gusev, and V.I. Agoshkov, 2016: Modeling Black Sea circulation with high resolution in the coastal zone. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **52**(3), 277–293.
- Zalesny, V.B., A.V. Gusev, V.O. Ivchenko, R. Tamsalu, and R. Aps, 2013: Numerical model of the Baltic Sea circulation. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model*, **28**(1), 85–100, <https://doi.org/10.1515/rnam-2013-0006>.