УДК 551.466:551.467 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(3).6

# ВЛИЯНИЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА НА ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА И ПУАНКАРЕ

**Музылев С.В., Цыбанева Т.Б.**

*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Москва,*
*Нахимовский проспект, д. 36, e–mail: smuzylev@mail.ru*
Статья поступила в редакцию 16.04.2019, одобрена к печати 24.07.2019

Приводятся теоретические основы линейной теории волн Кельвина и Пуанкаре в однородном океане под ледяным покровом. Лед полагается тонкой упругой пластиной постоянной толщины с постоянными значениями модуля Юнга, коэффициентов Пуассона и сжатия. Считается, что нормальная скорость на дне равна нулю, на нижней границе льда выполнены линеаризованные кинематическое и динамическое условия. Найдены и проанализированы явные решения для волн Кельвина и Пуанкаре, а также соответствующие им дисперсионные уравнения. Задача изучается в терминах общей теории волн без приближения гидростатики.

**Ключевые слова**: ледяной покров, волны Кельвина и Пуанкаре

## Введение

Теоретическое описание волновых движений в океане с учетом рельефа дна, береговых границ, вращения Земли и стратификации вод является классической проблемой геофизической гидродинамики. Однако в большинстве широко известных монографий по волнам в океане (Ле Блон, Майсек, 1981; Гилл, 1986; Лайтхилл, 1981; Педлоски, 1984) нет даже упоминания о возможном влиянии ледяного покрова на такие волны. Вероятно, это связано с тем, что для корректного учета ледяного покрова требуется привлечение не только гидродинамических подходов, но и методов теории упругости, что существенно затрудняет исследования.

## Постановка задачи и основные уравнения теории

Рассмотрим на вращающейся Земле заполненный однородной жидкостью канал постоянной глубины $z = -H = \text{const}$, ограниченный прямолинейными берегами: $y = 0$ и $y = L$. Будем полагать, что сверху канал покрыт льдом постоянной толщины $h$. Ось $z$ направлена вертикально вверх, ось $x$ совпадает с линией берега $y = 0$, ось $y$ направлена по нормали к берегу в сторону открытого моря. Линеаризованная система уравнений имеет вид (Pedlosky, 2003):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

где $u$, $v$ – компоненты горизонтальной скорости вдоль осей $x$ и $y$ соответственно; $w$ – вертикальная скорость; $P$ – отклонение давления от гидростатического, $\rho_w$ = const – плотность воды; $f$ = const – параметр Кориолиса.

Уравнения (1)–(4) стандартной процедурой (Pedlosky, 2003) сводятся к одному уравнению для давления $P(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \tag{5}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. На берегах (которые будем полагать отвесными), нормальная составляющая скорости равна нулю, то есть:

$$v\big|_{y=0,\,L} = 0\,. \tag{6}$$

На дне выполняется условие непротекания жидкости, которое в рассматриваемом случае постоянной глубины океана имеет вид:

$$w\big|_{z=-H} = 0\,. \tag{7}$$

На нижней кромке льда $z = 0$ выполняются линеаризованные кинематическое:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \tag{8}$$

и динамическое:

$$P - g\rho_w \eta = P_a \tag{9}$$

условия, где $\eta = \eta(x, y, t)$ – прогиб ледяной поверхности (под прогибами, в соответствии с теорией тонких пластин и оболочек (Тимошенко, Войновский-Кригер, 2009), понимаются перемещения в вертикальном направлении точек срединной поверхности положительных, если они направлены вверх), $g$ – ускорение свободного падения, $P_a = P_a(x, y, t)$ – давление непосредственно на границе вода–лед.

Необходимое в дальнейшем выражение для прогиба $\eta(x, y, t)$ через давление $P\big|_{z=0}$ на нижней границе льда найдем из уравнения (3) и кинематического условия (8). Тогда:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \tag{10}$$

Будем моделировать лед лежащей в горизонтальной плоскости тонкой упругой пластиной постоянной толщины $h$. Из уравнений для свободных колебаний такой пластины находим давление $P_a$ на нижней границе льда (Ландау, Лифшиц, 1965; Liu, Mollo-Christensen, 1988):

$$\frac{1}{\rho_w} P_a = \mathcal{P}\eta, \tag{11}$$

где $\mathcal{P} = B\Delta^2 + Q\Delta + M\partial^2/\partial t^2$ и:

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-s^2)\rho_w},\ Q = \frac{Kh}{\rho_w},\ M = \frac{\rho_I h}{\rho_w}. \tag{12}$$

Здесь $B$ – коэффициент цилиндрической жесткости (или жесткости при изгибе) льда, $E$ – модуль Юнга, $s$ – коэффициент Пуассона, $K$ – коэффициент сжатия льда, $\rho_I = \mathrm{const}$ – плотность льда. Слагаемые, пропорциональные $B$, $M$ и $Q$, возникают соответственно из-за упругих свойств льда; сил инерции и сил сжатия–растяжения, действующих на ледяной покров.

Необходимо отметить, что числовые значения механических характеристик морского льда – модуля упругости льда* (модуля Юнга) $E$ и сжатия $K$ – известны с небольшой точностью. Приведем характерные значения этих величин для льда (Liu, Mollo-Christensen, 1988): $E = 6\cdot10^9$ Н/м², $s = 0.3$, $K = 10^6$ Н/м², $\rho_w = 1025$ кг/м³, $\rho_I = 0.9\rho_w$. При толщине льда $h = 1$ м: $B \approx 5\cdot10^5$ м⁵/с², $Q \approx 10^3$ м³/с², $M = 0.9$ м.

Из (11) и динамического условия (9) имеем:

$$P\big|_{z=0} = \rho_w\left(g + \mathcal{P}\right)\eta. \tag{13}$$

Отсюда в силу (10) получаем единственное граничное условие на нижней поверхности льда:

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \left(g + \mathcal{P}\right)\frac{\partial P}{\partial z}\right]_{z=0} = 0. \tag{14}$$

Условия на берегах (6) и дне (7) следующим образом выражаются через отклонение $P$ давления от гидростатического:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial t} - f\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y=0,\,L} = 0, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, необходимо решить уравнение (5) при граничных условиях (14)–(16).

Будем искать решение задачи (5), (14)–(16) в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси $x$:

* В дальнейшем под модулем упругости льда будем понимать его динамическое (а не статическое) значение, определяемое, например, по данным о скоростях продольных и поперечных изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове. Динамический модуль упругости является фундаментальной физической характеристикой льда, он необходим для численной оценки механического поведения морского ледяного покрова при динамических нагрузках, время воздействия которых значительно меньше 1 с.

$$P(x, y, z, t) = \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}\, p(y, z)\,.$$

Тогда для амплитуды $p(y, z)$ получаем следующее уравнение:

$$\left(\omega^2 - f^2\right)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \omega^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - k^2 p\right) = 0 \qquad (17)$$

и граничные условия:

$$\left\{\left[g + B\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)^2 + Q\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right) - M\omega^2\right]\frac{\partial p}{\partial z} - \omega^2 p\right\}_{z=0} = 0, \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0\,, \qquad (19)$$

$$\left(\omega\frac{\partial p}{\partial y} + k f p\right)_{y=0,\, L} = 0\,. \qquad (20)$$

## Волны Кельвина в полуплоскости

Рассмотрим сначала более простой случай волн Кельвина в полуплоскости $0 \le y < \infty$, то есть когда ширина канала $L \to \infty$ (Музылев, Цыбанева 2012). Разделяя переменные в уравнении (17) и учитывая условие на дне (19), получим:

$$p(y, z) = a\,\mathrm{e}^{-\mu y}\,\mathrm{ch}\left[\lambda(H+z)\right], \qquad (21)$$

где $a = \mathrm{const}$ – амплитуда волны Кельвина. Постоянные $\mu > 0$ и $\lambda$, согласно уравнению (17), связаны соотношением:

$$\left(\omega^2 - f^2\right)\lambda^2 + \omega^2\left(\mu^2 - k^2\right) = 0\,. \qquad (22)$$

Из условия на берегу $y = 0$ (20) и соотношения (22) находим:

$$\mu = f k / \omega\,;\ \lambda = \left|k\right|, \qquad (23)$$

следовательно, $p(y, z) = a\,\mathrm{e}^{-(fk/\omega)y}\,\mathrm{ch}\left[\left|k\right|(H+z)\right]$. Условие (18) дает дисперсионное уравнение для волн Кельвина в полуплоскости с учетом ледяного покрова:

$$\omega^2 = \boldsymbol{g}_K(\omega,\ k)\left|k\right|\,\mathrm{th}\left(\left|k\right|H\right), \qquad (24)$$

где:

$$\boldsymbol{g}_K(\omega,\ k) = g + \left[Bk^4\left(\frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2}\right)^2 - Qk^2\left(\frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2}\right) - M\omega^2\right]. \qquad (25)$$

Как видно из (25), влияние ледяного покрова в дисперсионном уравнении (24) для волн Кельвина описывается тремя слагаемыми, стоящими в квадратной скобке.

Для длинных ($\left|k\right|H \ll 1$) низкочастотных ($\omega \ll f, \omega \ll \sqrt{g/M}$) волн получаем: $\omega^2 \approx c_K^2 k^2$, где $c_K$ – корень уравнения:

$$c_K^6 - \left(g - M\omega^2\right)H c_K^4 - QHf^2c_K^2 - BHf^4 = 0\,. \qquad (26)$$

В силу теоремы Декарта о корнях многочленов (согласно которой число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами либо равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов, либо на четное число меньше (Курош, 1959)) уравнение (26) имеет ровно один положительный корень $c_K^2$. Для реальных значений параметров с большой точностью:

$$c_K^2 \approx gH + \frac{f^2\left(Bf^2 + QgH\right)}{g^2H - Qf^2} \approx gH,$$

поэтому в низкочастотном пределе ледяной покров практически не оказывает влияния на фазовую скорость длинных волн Кельвина.

Для высокочастотных волн Кельвина ($\omega \gg f$) ситуация меняется: дисперсионное уравнение для них перестает зависеть от параметра Кориолиса и с большой точностью может быть записано в виде:

$$\omega^2 = \left(g + Bk^4 - Qk^2 - M\omega^2\right)\left|k\right| \operatorname{th}\left(\left|k\right|H\right). \qquad (27)$$

Другими словами, дисперсионное уравнение для высокочастотных волн Кельвина совпадает с дисперсионным уравнением для изгибно-гравитационных волн. (Музылев, 2010). Заметим, что из (21) и (23) следует равенство нулю нормальной берегу скорости $v(x, y, z, t)$ всюду в рассматриваемой области. Этот результат совпадает с аналогичным выводом для классических волн Кельвина.

### Волны Пуанкаре

Рассмотрим теперь канал конечной ширины $L$. Разделяя переменные в уравнении (17) ($\lambda^2$ – параметр разделения) и учитывая условие на дне (19), получим:

$$p(y,z) = \left(a_1 \sin \nu y + a_2 \cos \nu y\right) \operatorname{ch}\left[\lambda(H+z)\right], \qquad (28)$$

где $a_1$ и $a_2$ – постоянные, зависимость между которыми определяется из граничных условий. Параметры $\nu$ и $\lambda$ связаны соотношением:

$$\left(\omega^2 - f^2\right)\lambda^2 - \omega^2\left(\nu^2 + k^2\right) = 0. \qquad (29)$$

Условия на берегу (20) и соотношение (29) дают необходимое условие существования нетривиальных решений:

$$\left(\omega^2 - f^2\right)\left(\lambda^2 - k^2\right)\sin \nu L = 0. \qquad (30)$$

Следовательно, возможны три случая: I – $\omega = \pm f$. II – $\sin \nu L = 0$. III – $\lambda = \pm k$.

Рассматривая исходную систему уравнений (1)–(4), можно показать, что в первом случае нет никаких нетривиальных решений, за исключением решения с единственным волновым числом, для которого это решение совпадает с волной Кельвина.

Во втором случае $\nu L = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ (при $n = 0$ в силу (28) давление не зависит от координаты $y$, удовлетворить условиям (20) на обоих берегах становится невозможным, поэтому $n = 0$ исключается из рассмотрения). Из (29):

$$\lambda_n^2 = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2}\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{31}$$

Условие на нижней границе вода–лед (18) дает дисперсионное уравнение для волн Пуанкаре при учете ледяного покрова:

$$\omega_n^2 = \boldsymbol{g}_P(\omega_n, k, n)\lambda_n \operatorname{th}\left(\lambda_n H\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

где:

$$\boldsymbol{g}_P(\omega_n, k, n) = g + \left[B\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^2 - Q\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) - M\omega_n^2\right]. \tag{33}$$

В приближении длинных волн дисперсионное уравнение (32) принимает вид:

$$\omega_n^2 = \boldsymbol{g}_P(\omega_n, k, n)H\lambda_n^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

или, в силу (31):

$$\omega_n^2 = f^2 + \boldsymbol{g}_P(\omega_n, k, n)H\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь третий случай $\lambda = \pm k$. Из соотношения (29) имеем $\nu = \pm i f k / \omega$. Естественно тогда искать решение в виде:

$$p(y,z) = \left(b_1 e^{-\mu y} + b_2 e^{\mu y}\right)\operatorname{ch}\left[\lambda(H+z)\right], \tag{36}$$

где $\mu = \pm\ f k / \omega$. Из условия на берегу (20) при $y = 0$ находим:

$$p(y,z) = b\left[\left(\omega\mu + k f\right)e^{-\mu y} + \left(\omega\mu - k f\right)e^{\mu y}\right]\operatorname{ch}\left[\lambda(H+z)\right], \tag{37}$$

где $b$ – произвольная постоянная. Нетрудно проверить, что при любом выборе знака константы $\mu$ нормальная берегу составляющая скорости $\nu$ тождественно равна нулю во всей полосе, поэтому условие при $y = L$ выполняется автоматически.

## Выводы

Ледяной покров существенно влияет на характеристики волн Кельвина и Пуанкаре в области коротких волн (десятки и первые сотни метров), где эти волны ведут себя как упругие волны в пластине на упругом основании, для длинных же волн (тысяча и более метров) его роль незначительна.

Результаты получены в терминах общей теории волн под ледяным покровом без использования приближения гидростатики.

Работа выполнена в рамках темы 0149-2019-0002 Госзадания.

## Литература

*Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 2 / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 416 с.
*Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
*Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
*Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 480 с.
*Музылев С.В.* Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи // Современные проблемы динамики океана и атмосферы. М.: «Триада ЛТД», 2010. С. 315–345.
*Музылев С.В., Цыбанева Т.Б.* Волны Кельвина в однородном море под ледяным покровом // Вестник МВТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки“. 2012. Спецвыпуск № 4. С. 149–157.
*Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
*Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. 816 с.
*Liu A.K., Mollo-Christensen E.* Wave propagation in a solid ice pack // J. Phys. Oceanogr. 1988. Vol. 18. No. 11. P. 1702–1712.
*Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere. Springer, 2003. 264 p.

## INFLUENCE OF ICE COVER ON KELVIN AND POINCARE WAVES

**Muzylev S.V., Tsybaneva T.B.**

*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,*
*36 Nahimovskiy prospekt, Moscow, 117997, Russia, e–mail: smuzylev@mail.ru*
Submitted 16.04.2019, accepted 24.07.2019

This work presents theoretical foundations of Kelvin and Poincare waves in the homogeneous ocean under an ice cover. The ice is considered as thin elastic plate of uniform thickness, with constant values of Young’s modulus, Poisson’s ratio, density, and compressive stress. The boundary conditions are such that the normal velocity at the bottom is zero, and at the undersurface of the ice the linearized kinematic and dynamic boundary conditions are satisfied. We present and analyze explicit solutions for the Kelvin and Poincare waves and the dispersion equations. The problem is examined in the context of a unified theory and without the hydrostatic assumption.

**Keywords:** ice cover, Kelvin and Poincare waves

## References

*Gill A.* Dinamika atmosfery i okeana (Atmosphere-Ocean Dynamics). Vol. 2, Per. s angl., Moscow: Mir, 1986, 416 p.
*Kurosh A.G.* Kurs vysshei algebry (Higher Algebra). Moscow: Nauka, 1965. 431 p.
*Landau L.D. and Lifshitz E.M.* Teoriya uprugosti (Theory of Elasticity). Moscow: Nauka, 1965, 204 p.

*Le Blon P. and Mysak L.* Waves in the Ocean. Elsevier, 1978, 480 p.

*Lighthill J*. Volny v zhidkostyah (Waves in Fluids), Moscow: Mir, 1981, 600 p.

*Liu A.K. and Mollo-Christensen E.* Wave propagation in a solid ice pack. *J. Phys. Oceanogr.*, 1988, Vol. 18, No. 11, pp. 1702–1712.

*Muzylev S.V*. Volny v okeane pod ledyanym pokrovom: osnovy teorii i model'nye zadachi (Waves in an ocean under the ice cover: foundation of theory and model problems). "Sovremennye problemy dinamiki okeana i atmosfery", Moscow: "Triada LTD", 2010, pp. 315–345.

*Muzylev S.V. and Tsybaneva T.B.* Volny Kelvina v odnorodnom more pod ledyanym pokrovom (Kelvin Waves in Homogeneous Sea under Ice Cover). *Vestnik MVTU im. N.E. Baumana. Ser. "Estestvennye nauki*", Specvypusk, 2012, No. 4, pp. 149–157.

*Pedlosky J*. Geofizicheskaya gidrodinamika, (Geophysical Fluid Dynamics). Moscow: Mir, 1984, 816 p.

*Pedlosky J*. Waves in the Ocean and Atmosphere. Springer, 2003, 264 p.

*Timoshenko S.P. and Woinowsky-Krieger S*. Theoriya plastinok i obolochek, (Theory of Plates and Shells). Moscow: Nauka, 1966, 636 p.