УДК 551.465 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(2).9

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИДРОДИНАМИКИ ОКЕАНСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Каменкович В.М., Нечаев Д.А.

Университет Южного Миссисипи, Хаттиесбург, 39406, США
e-mail: Dmitri.Nechaev@usm.edu

Статья поступила в редакцию 15.04.2019, одобрена к печати 30.05.2019

Работа посвящена анализу тензорных соотношений в различных системах ортогональных криволинейных координат. Анализ таких формул позволяет выявить основные особенности ряда приближенных координатных систем, широко применяемых при анализе динамических процессов в океане. Статья состоит из двух частей. В первой части кратко излагаются основные положения тензорного анализа, используемого в дальнейшем во второй части. Во второй части рассматриваются различные формы векторных произведений, дивергенции вектора и симметричного тензора второго ранга, градиент скалярной функции, вихрь векторного поля, особенности тензора скоростей деформации, общий вид оператора Лапласа, свойства оператора набла, общие формы индивидуальной производной по времени скаляра и вектора. Для такого анализа выводятся формулы для соответствующих характеристик, выраженные через физические компоненты рассматриваемых тензоров.

Ключевые слова: тензорный анализ, ковариантная производная, символы Кронекера, Кристоффеля, Леви-Чивита, вихрь векторного поля, тензор скоростей деформации

1. Основы тензорного анализа

1.1 *Общие положения*

Наиболее просто основные дифференциальные операторы гидродинамики выглядят в прямоугольных декартовых координатах x, y, z. Однако во многих гидрофизических проблемах система прямоугольных декартовых координат оказывается не самой удобной, и мы вынуждены использовать криволинейные координаты, например, сферические координаты λ, φ, r При этом переход от x, y, z координат к λ, φ, r требует довольно громоздких преобразований.

Сформулированную в общем заголовке задачу удобнее всего решать, представляя дифференциальные операторы в тензорном виде и используя основные положения тензорного анализа. Мы изложим эти положения очень кратко в разделах 1.2–1.10. Более детальное изложение см., например, Кочин (1951); McConnell (1957); Корн, Корн (1973, гл. 6 и 16); Каменкович (1973, Приложение). Мы приведем большие отрывки из Корн, Корн (1973) в адаптированном виде.

Тензор определяется совокупностью своих компонент, число которых зависит от ранга тензора. Простейшие примеры тензоров: скаляры (ранг = 0) и векторы (ранг = 1). Важнейшее свойство тензоров – независимость тензорных соотношений от выбора системы координат: если тензорное соотношение справедливо в какой-то системе координат, то оно будет справедливо и в любой другой системе координат, полученной из исходной системы путем некоторого непрерывного преобразования. Именно в силу этого свойства, тензорные соотношения идеально подходят для формулировки физических соотношений.

В дальнейшем мы подробно остановимся на выводе формул, выражающих тензорные соотношения в различных системах ортогональных криволинейных координат. Мы выразим такие формулы через коэффициенты Ламе (масштабные множители), что позволит нам наиболее простым образом сформулировать основные соотношения в псевдо-сферической системе координат, широко применяемой при анализе динамических процессов в океанологии.

1.2 *Локальные базисы; контравариантные и ковариантные компоненты вектора; соглашение о суммировании*

Будем рассматривать трехмерное пространство, в котором положение каждой точки определяется *тремя* числами (координатами x^α). Условимся писать индекс α у пространственных координат наверху (не путать со степенью!). Индекс α может иметь любое из значений 1, 2, 3. Линии, вдоль которых меняется лишь одна из координат x^α, называются *координатными линиями*. Если координатные линии рассматриваются совместно, то говорят о системе координат. Если в системе координат все координатные линии являются прямыми и координатные линии попарно перпендикулярны, то говорят о декартовой (Cartesian) системе координат (см. Корн, Корн, 1973; гл. 2). Если координатные линии попарно перпендикулярны (но не обязательно являются прямыми), то говорят об ортогональной системе координат. В общем случае говорят о криволинейных координатах.

Пример. Сферическая система координат состоит из долготы λ $-\pi \le \lambda < \pi$), широты φ ($-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$) и расстояния от центра Земли *r*. Чтобы придать общность изложению, будем обозначать:

$$\lambda = x^1, \qquad \varphi = x^2, \qquad r = x^3 .$$

Полезны следующие легко проверяемые соотношения:

$$x = x^3 \cos x^2 \cos x^1 , \quad y = x^3 \cos x^2 \sin x^1 , \quad z = x^3 \sin x^2 ,$$

$$x^1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad x^2 = \arcsin\frac{z}{r}, \qquad x^3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Пусть x, y, z – произвольные декартовы координаты. Формулы (1):

$$x^\alpha = x^\alpha(x, y, z); \ \alpha = 1,2,3 , \tag{1}$$

определяют криволинейные координаты x^α. Пусть O – фиксированная точка. Рассмотрим некоторую точку $M(x^\alpha)$ и ее радиус-вектор $\mathbf{OM}$. Вектор:

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^{\alpha}} \tag{2}$$

направлен, как известно, по касательной к координатной линии x^{α} в точке M. Согласно (2), каждая координатная система x^{α} порождает в точке M тройку векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующих локальный базис в точке M. Компоненты a^{α} вектора **a** относительно базиса $\mathbf{e}_{\alpha}$ называются *контравариантными*:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{3}$$

Примем *соглашение*, что если в одночлене один и тот же индекс встречается дважды (один раз вверху и один раз внизу), то написанное обозначает сумму одночленов при значениях этого индекса 1, 2, 3 (см. для примера соотношение (3)). Отметим что, обозначение индекса, по которому производится суммирование, может быть изменено, следовательно, $a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$ и $a^{\beta}\mathbf{e}_{\beta}$ это одинаковые выражения.

С базисом $\mathbf{e}_{\alpha}$ в точке M связан сопряженный базис $\mathbf{e}^{\alpha}$, векторы которого определяются как:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)}, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{e}_{\beta}$ – правое векторное произведение, $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ – правое смешанное произведение. Заметим, что $\mathbf{e}_{\alpha}$ выражаются через $\mathbf{e}^{\alpha}$ формулами, аналогичными (4).

Рассмотрим скалярное произведение $\mathbf{e}_{\alpha}$ и $\mathbf{e}^{\beta}$. Очевидно, что:

$$\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}^{\beta} = \mathbf{e}^{\beta} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \tag{5}$$

где δ – символ Кронекера $\delta_{\alpha}^{\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $\delta_{\alpha}^{\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$.

Компоненты a_{α} вектора **a** относительно базиса $\mathbf{e}^{\alpha}$ называются *ковариантными*:

$$\mathbf{a} = a_{\alpha}\mathbf{e}^{\alpha}. \tag{6}$$

Заметим, что в силу (5) ковариантные компоненты a_{α} вектора **a** могут быть получены как:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = a_{\beta}\mathbf{e}^{\beta} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = a_{\beta}\delta_{\alpha}^{\beta} = a_{\alpha}.$$

Следовательно:

$$a_{\alpha} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}. \tag{7}$$

Таким же образом, компоненты a^{α} вектора **a** относительно базиса $\mathbf{e}_{\alpha}$ (контравариантные компоненты) могут быть получены как:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{\alpha} = a^{\beta}\mathbf{e}_{\beta} \cdot \mathbf{e}^{\alpha} = a^{\beta}\delta_{\beta}^{\alpha} = a^{\alpha} \text{ или } a^{\alpha} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{\alpha}. \tag{8}$$

1.3 *Определение тензора*

В общем случае мы имеем исходную систему координат:

$$x^\alpha = (x^1, x^2, x^3),\ \alpha=1,2,3 \tag{1}$$

и преобразованную систему координат:

$$\bar{x}^\alpha = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3),\ \alpha=1,2,3\,. \tag{2}$$

Заметим, что значения переменных в преобразованной системе координат обозначаются чертой сверху. Преобразование координат определяется соотношениями:

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, x^3)\,,\ \alpha=1,2,3\,. \tag{3}$$

Будем считать, что обратное преобразование координат:

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)\,,\ \alpha=1,2,3 \tag{4}$$

существует и единственно.

Рассмотрим вектор **a** в точке M. Его компоненты a_α , α=1,2,3 или a^β, β=1,2,3 зависят от определённой системы координат. Но сам вектор не зависит от этого выбора и, следовательно:

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \bar{a}^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha\ . \tag{5}$$

Найдем связь между векторами локальных базисов $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$ и $\mathbf{e}_\beta$:

$$\bar{\mathbf{e}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha}\mathbf{e}_\beta\,. \tag{6}$$

Умножая скалярно обе части (6) на вектор **a** и используя (1.2; 7 и 8) для базисов $\mathbf{e}_\alpha$ и $\bar{\mathbf{e}}_\beta$, получим:

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} a_\beta\,. \tag{7}$$

Как мы видим, векторы базиса $\mathbf{e}_\alpha$ и ковариантные компоненты a_α вектора **a** преобразуются по одному и тому же закону с невырожденной матрицей преобразования с элементами $A^\beta_\alpha = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha}$:

$$\bar{\mathbf{e}}_\alpha = A^\beta_\alpha \mathbf{e}_\beta\,; \tag{8а}$$

и

$$\bar{a}_\alpha = A^\beta_\alpha a_\beta\,. \tag{8б}$$

Преобразование контравариантных компонент a^α вектора **a** может быть получено из соотношения (5):

$$\bar{a}^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha = a^\beta \mathbf{e}_\beta \tag{9}$$

при помощи (6):

$$\bar{a}^\alpha A^\nu_\alpha \mathbf{e}_\nu = a^\beta \mathbf{e}_\beta\,. \tag{10}$$

Умножая скалярно справа обе части (9) на вектор $\mathbf{e}^\gamma$ и используя (1.2; 5), получим:

$$\bar{a}^\alpha A^\gamma_\alpha = a^\gamma \tag{11а}$$

или

$$\bar{a}^\alpha = (A^\gamma_\alpha)^{-1} a^\gamma\,. \tag{11б}$$

Так как $\dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\beta}_{\gamma}$, $(A^{\gamma}_{\alpha})^{-1} = \dfrac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}$. Мы обнаружили, что контравариантные компоненты a^{β} вектора **a** преобразуются по закону:

$$\overline{a}^{\alpha} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} a^{\beta} . \tag{12}$$

Отметим, что дифференцирование соотношения (3):

$$d\overline{x}^{\alpha} = d\overline{x}^{\alpha}(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \tag{13}$$

показывает, что контравариантные компоненты a^{β} вектора **a** преобразуются по тому же закону что и длины бесконечно малых смещений вдоль координатных линий dx^{β}. Мы нашли объяснение названиям «ковариантный» (преобразуется так же как базисные векторы $\mathbf{e}_{\alpha}$, сравните формулы (6), (7)) и «контравариантный» (преобразуется не так как базисные векторы $\mathbf{e}_{\alpha}$, сравните формулы (6), (12)).

Мы видим, что вектор **a** характеризуется тем, что совокупность его компонент (контравариантных или ковариантных) преобразуется при переходе от системы координат x^{α} к системе координат $\overline{x}^{\beta}$ согласно формулам (7 или 12). Верно и обратное: если в каждой системе координат определена тройка чисел, преобразующаяся при переходе от одной системы координат к другой согласно формулам (7 или 12), то эта тройка чисел может рассматриваться в качестве компонент некоторого *вектора*, поскольку в силу (9):

$$a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} = \overline{a}^{\beta}\overline{\mathbf{e}}_{\beta} .$$

Таким образом, фундаментальное свойство *инвариантности* вектора относительно выбора системы координат удается выразить через его компоненты, каждый из которых зависит, естественно, от выбора той или иной системы координат.

Понятия скаляра и вектора в физике являются основными. Однако ограничиться только ими не удается. Например, из гидродинамики известно, что вектор поверхностной силы $\mathbf{F}$, действующей на произвольную площадку в точке M, линейно и однородно зависит от вектора нормали **n** к этой площадке. В системе координат x^{α} это можно записать как:

$$F^{\alpha} = p^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} n^{\beta} , \tag{14}$$

где $p^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$ совокупность девяти чисел, индексы в которой расставлены так, чтобы согласовываться с индексами у векторов n^{β} и F^{α}. Символ «$\cdot$» ставится там, где отсутствуют значения соответствующих индексов. Для упрощения обозначений примем соглашение, что символы «$\cdot$» могут быть опущены:

$$p^{\alpha}_{\beta} \equiv p^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} , \tag{15}$$

где подразумевается, что верхние индексы предшествуют нижним.

Поскольку характер связи между **F** и **n** не зависит от выбора системы координат, совокупность девяти чисел p^{α}_{β} преобразуется при переходе от системы координат x^{α} к системе координат $\overline{x}^{\alpha}$ как внешнее произведение некоторого контравариантного и некоторого ковариантного вектора, которые преобразуются независимо друг от друга. Мы можем использовать тогда формулы (7) и (12) и получить:

$$\bar{p}^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} p^{\alpha}_{\beta} . \tag{16}$$

В книге McConnell (1957; chapter II; subsections 7 и 8) показано, что изложенный подход дает правильный результат и в общем случае.

Верно и обратное: если хотя бы в одной системе координат зависимость вектора $\mathbf{F}$ от вектора $\mathbf{n}$ линейна и однородна, а совокупность чисел p^{α}_{β} преобразуется при переходе от одной системы координат к другой по только что выписанному закону, то линейный и однородный характер связи этих векторов, не зависит от выбора конкретной системы координат.

Общее определение тензора произвольного ранга и типа строится по аналогии с (16). Будем говорить, что задан, например, тензор $Q^{\alpha\beta}_{\cdot\gamma} \equiv Q^{\alpha\beta\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\gamma}$ третьего ранга, два раза контравариантный и один раз ковариантный, если для всех точек, описываемых системой координат x^{α}, определена совокупность упорядоченных 27 чисел преобразующаяся при переходе от системы координат x^{α} к системе координат $\bar{x}^{\alpha}$ по закону:

$$\bar{Q}^{\kappa\mu\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\nu} = \frac{\partial \bar{x}^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} Q^{\alpha\beta\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\gamma} . \tag{17}$$

В дальнейшем будем ссылаться на соотношение (17) как на закон преобразования компонент тензора любой природы. Очевидно, что скаляры и векторы являются тензорами.

Остановимся более подробно на роли индексов в определении типа тензора. По определению тензор (обозначаемый, например, буквой Q) – это совокупность функций от x^1, x^2, x^3. Каждая такая функция называется компонентой тензора Q. Для определения типа тензора вводятся индексы, записываемые в каждой компоненте наверху (число таких верхних индексов обозначается буквой r) и внизу (число таких нижних индексов обозначается буквой s). Сумма $r+s$ называется рангом тензора R ($R = r + s$). Каждый индекс пробегает значения 1, 2, 3.

Вводится соглашение о суммировании (см. обсуждение (1.2; 4)). В выражении $\sum_{k=1}^{3} A^{ik} B_k = C^i$ знак суммы опускается (если нет указания об обратном) и выражение $A^{ik} B_k$ воспринимается как $\sum_{k=1}^{3} A^{ik} B_k$. Индексы (верхние и нижние) разбиваются на *свободные* (встречающиеся только вверху или только внизу) и *немые* (встречающиеся дважды, один раз наверху и один раз внизу). В этом примере немой индекс k встречается дважды, (один раз наверху и один раз внизу). В производной вида $\frac{\partial}{\partial x^k}$ индекс k считается нижним. Обозначение любого немого индекса может быть изменено. Например:

$$A^{ik} B_k = A^{ij} B_j .$$

Тип тензора определяется числом и расстановкой индексов. Учтем, что в развернутых обозначениях (например, $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$) на каждой вертикали пишется не более одного индекса. Порядок следования индексов является существенным, так что $Q^{\alpha}_{\cdot\beta}$ и $Q^{\cdot\,\alpha}_{\beta}$, вообще говоря, различны.

1.4 *Метрический тензор; физические компоненты тензора*

Базисы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}^\alpha$ порождают в точке M две важные симметрические матрицы $m_{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ (α – номер строки, β – столбца):

$$m_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta\,, \quad m^{\alpha\beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta \qquad (1)$$

Матрица $m_{\alpha\beta}$ называется *метрическим* или *фундаментальным* тензором. Из определения (1) и (1.2; 5) следует, что:

$$m^{\alpha\gamma} m_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,.$$

Нетрудно показать, что $m_{\alpha\beta}$ является тензором. Действительно, из определения (1) матрицы $m_{\alpha\beta}$ и формулы (1.3; 6) следует закон преобразования $m_{\alpha\beta}$:

$$\overline{m}_{\mu\nu} = \overline{\mathbf{e}}_\mu \cdot \overline{\mathbf{e}}_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}\mathbf{e}_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu} m_{\alpha\beta}\,, \qquad (2)$$

что свидетельствует о тензорном характере $m_{\alpha\beta}$ (см. определение тензора (1.3;15)).

Наряду с локальным базисом $\mathbf{e}_\alpha$ рассмотрим нормированный базис $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{(m_{11})^{1/2}}\mathbf{e}_1,\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{(m_{22})^{1/2}}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{(m_{33})^{1/2}}\mathbf{e}_3\,, \qquad (3)$$

где все $\mathbf{u}_\alpha$ – единичные векторы. Компоненты $\hat{a}_\alpha$ вектора **a** относительно $\mathbf{u}_\alpha$ называются *физическими*:

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{a}_\alpha \mathbf{u}_\alpha\,, \qquad (4)$$

где

$$\hat{a}_1 = (m_{11})^{1/2} a^1,\ \hat{a}_2 = (m_{22})^{1/2} a^2,\ \hat{a}_3 = (m_{33})^{1/2} a^3\,. \qquad (5)$$

Аналогично определяются физические компоненты любого контравариантного тензора. Например:

$$\hat{c}_{11} = (m_{11} m_{11})^{1/2} c^{11},\ \hat{c}_{12} = (m_{11} m_{22})^{1/2} c^{12},\ \ldots \qquad (6)$$

Если у тензора есть нижние индексы, то надо перейти к ассоциированному тензору (см. раздел 1.5), имеющему только верхние индексы и использовать формулы типа (6).

В случае ортогональных криволинейных координат вводятся коэффициенты Ламе h_1, h_2, h_3 (длины векторов ортогонального локального базиса):

$$h_1 = \sqrt{m_{11}},\ h_2 = \sqrt{m_{22}},\ h_3 = \sqrt{m_{33}}\,. \qquad (7)$$

Для сферических координат имеем, например:

$$h_1 = r\cos(\varphi),\ h_2 = r,\ h_3 = 1. \qquad (8)$$

Согласно (1) и (7), в случае ортогональных криволинейных координат:

$$m_{\alpha\beta} = 0 \ \text{ при } \alpha \neq \beta\,;\ \ m_{\alpha\beta} = h_\alpha^2 \ \text{ при } \alpha = \beta\,, \qquad (9)$$

$$m^{\alpha\beta} = 0 \ \text{ при } \alpha \neq \beta; \ \ m^{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha^2} \ \text{ при } \alpha = \beta, \tag{10}$$

$$m = \det[m_{\alpha\beta}] = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \tag{11}$$

где $\det$ – сокращение от английского термина определитель (determinant). Верхние индексы коэффициентов Ламе в (9)–(11) означают степени.

1.5 *Поднятие и опускание индексов. Ассоциированные тензоры*

Контравариантный вектор a^i и ковариантный вектор a_i называются *ассоциированными*, если их компоненты связаны в каждой точке следующими соотношениями:

$$a^k = a_i m^{ik} \ \text{ и, следовательно, } \ a_i = m_{ik} a^k. \tag{1}$$

Действительно,

$$a_i m^{ik} = a_i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = (a_i \mathbf{e}^i) \cdot \mathbf{e}^k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k = a^k, \tag{2}$$

$$a_i = m_{ik} a^k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k a^k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_k a^k) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{3}$$

Аналогично, для того чтобы получить тензор, ассоциированный данному тензору $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ следует, по определению, поднять индекс k посредством умножения на m^{kj} или опустить индекс i посредством умножения на m_{ji}. Так, результат поднятия индекса k_2 в $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ записывается следующим образом:

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_r \cdot j \ \cdot \ \ldots \ \cdot}_{\cdot \ \cdot \ \ldots \ \cdot k_1 \cdot \ k_3 \ldots k_s} = m^{jk_2} A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}. \tag{4}$$

Более подробно см. Корн, Корн (1973; 16.7–3).

Соответствие между ассоциированными тензорами устанавливает между ними отношение эквивалентности, разбивающее множество всех тензоров на классы эквивалентных тензоров, не имеющих общих элементов. Поэтому компоненты всех тензоров, ассоциированных тензору A, рассматриваются как различные аналитические представления тензора A.

В частности, компоненты a^k и a_i, связанные соотношениями (2) или (3), можно интерпретировать, как контравариантные и ковариантные составляющие одного и того же вектора **a** относительно локального базиса, связанного с данной системой координат. Напомним, что

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{e}_k = a_i \mathbf{e}^i.$$

Рассмотрим тензор $Q^\alpha_\beta \equiv Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$. Наряду с ним можно рассматривать следующие тензоры:

$$Q^{\alpha\beta} \equiv Q^{\alpha\beta}_{\cdot\,\cdot} = m^{\alpha\gamma} Q^{\cdot\,\beta}_{\gamma\,\cdot}, \ Q_{\alpha\beta} \equiv Q^{\cdot\,\cdot}_{\alpha\beta} = m_{\alpha\gamma} Q^{\gamma\,\cdot}_{\cdot\,\beta}, \ Q^{\cdot\,\beta}_{\alpha\,\cdot} = m^{\beta\gamma} Q^{\cdot\,\cdot}_{\alpha\gamma}.$$

Все тензоры Q^α_β, $Q^{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$, $Q^{\cdot\,\beta}_{\alpha\,\cdot}$, по-существу, являются различными представлениями одной и той же физической характеристики. Если ограничиться прямоугольными декартовыми координатами, то различие между этими тензорами исчезает. Очевидно, что класс таких тензоров может быть образован для любого исходного тензора.

1.6 *Наиболее распространенные типы тензоров*

Ниже приведена таблица тензоров наиболее распространенного типа, основанная на законе преобразования их компонент. Эта таблица является адаптированной таблицей 16.2–1 из (Корн, Корн; 1973).

Таблица 1. Наиболее распространенные типы тензоров.

Тип тензора	Компоненты в системе координат x^1, x^2, x^3	Компоненты в системе координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$
1. Скаляр (тензор ранга 0) $R = r = s = 0$	$a(x^1, x^2, x^3)$	$\bar{a}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = a(x^1, x^2, x^3)$
2. Контравариантный вектор (тензор ранга 1) $R = r = 1,\ s = 0$	$a^i(x^1, x^2, x^3)$	$\bar{a}^k = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} a^i$
3. Ковариантный вектор (тензор ранга 1) $R = s = 1,\ r = 0$	$a_i(x^1, x^2, x^3)$	$\bar{a}_k = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} a_i$ (см. вывод 1.3; 10)
4. Контравариантный тензор ранга 2 $R = r = 2,\ s = 0$	$A^{ik}(x^1, x^2, x^3)$	$\bar{A}^{jh} = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \dfrac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^k} A^{ik}$ (см. вывод 1.3; 7)
5. Ковариантный тензор ранга 2 $R = s = 2,\ r = 0$	$A_{ik}(x^1, x^2, x^3)$	$\bar{A}_{jh} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^h} A_{ik}$
6. Смешанный тензор ранга 2 $R = 2,\ r = s = 1$	$A_i^k(x^1, x^2, x^3)$	$\bar{A}_h^j = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^h} \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} A_i^k$

Вывод формул 4–6. таблицы 1. обсуждался в разделе 1.3 (см. обсуждение формулы (1.3; 16)). Преобразования тензоров второго ранга в разделах 4, 5, 6 таблицы 1 определены на основе представления этих тензоров в виде внешнего произведения векторов, рассмотренных в разделах 2, 3 этой таблицы (например, $A^{ik} = a^i b^k$).

Признак тензора. Пусть известно, что при *произвольном* тензоре $B^{\beta\gamma}$ соотношение:

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma} B^{\beta\gamma} = C^{\alpha} \tag{4}$$

всегда дает некоторый тензор C^{α}. Тогда $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ также будет тензором.

1.7 *Допустимые операции*

Перечислим операции с тензорами, результат которых снова дает тензоры.

1. Сложение тензоров A и B одного и того же ранга и типа дает тензор, компоненты которого в некоторой координатной системе (и, следовательно, в каждой координатной системе) равны суммам соответствующих компонент тензоров A и B.

2. Свертывание – операция, которая может быть применена к смешанному тензору. Например, задан тензор $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$. Выберем какой-нибудь верхний индекс и какой-нибудь нижний индекс и просуммируем все компоненты с совпадающими значениями этих индексов, то полученные суммы будут компонентами нового тензора, $r-1$ раз контравариантного и $s-1$ ковариантного.

3. Произведением $C = AB$ (внешним) двух тензоров A и B, определяемых компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ и $B^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{h_1 h_2 \ldots h_q}$, называется тензор с компонентами $C^{i_1 i_2 \ldots i_r \; j_1 j_2 \ldots j_p}_{k_1 k_2 \ldots k_s \, h_1 h_2 \ldots h_q} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s} \; B^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{h_1 h_2 \ldots h_q}$.

4. Если произведение двух тензоров A и B можно свернуть таким образом, что в каждом из слагаемых один или несколько верхних индексов компоненты $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ будут совпадать с одним или несколькими нижними индексами компоненты $B^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{h_1 h_2 \ldots h_q}$, то полученные суммы будут служить компонентами *нового* тензора (называемого внутренним произведением тензоров A и B).

1.8 *Ковариантное дифференцирование тензора*

Рассмотрим тензорное поле и изучим вопрос об изменении тензора при переходе из точки M в близкую точку M'. Прежде всего найдем изменение векторов локального базиса:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{OM}}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma \,. \qquad (1)$$

Это соотношение определяет новый объект $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, называемый *символом Кристоффеля второго рода*. Из (1) следует, что:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}. \qquad (2)$$

Для $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ можно получить следующую формулу:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} m^{\gamma\kappa} \left(\frac{\partial m_{\kappa\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial m_{\kappa\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial x^\kappa} \right). \qquad (3)$$

Отсюда нетрудно найти закон преобразования для $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ и показать, что $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ не является тензором.

Итак, при переходе в точку $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$ локальный базис изменяется и становится равным:

$$\mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + d\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta = \mathbf{e}_\alpha + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma dx^\beta,$$

или, используя матрицу преобразования $A^{\beta}_{\cdot\,\alpha}$ (см. 1.3; 8а и 1.3; 11):

$$\mathbf{e}'_\alpha = A^{\beta}_{\cdot\,\alpha} \mathbf{e}_\beta \,, \qquad (4)$$

где:

$$A^{\beta}_{\cdot\,\alpha} = \delta^{\beta}_{\cdot\,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\kappa\alpha} dx^{\kappa}. \qquad (5)$$

Так как матрица преобразования $A^{\beta}_{\cdot\,\alpha}$ не выраждена:

$$\mathbf{e}_{\alpha} = B^{\beta}_{\cdot\,\alpha}\mathbf{e}'_{\beta} \qquad (6)$$

где матрица преобразования $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ с точностью до членов линейных относительно dx^{α}, может быть записана как:

$$B^{\beta}_{\cdot\,\alpha} = \delta^{\beta}_{\cdot\,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\kappa\alpha} dx^{\kappa} \qquad (7)$$

Обратимся теперь к решению основной задачи и рассмотрим для примера тензор $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}$. Как сравнить между собой значения $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M)$ и $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M')$? Трудность сравнения вызвана тем, что алгебраические операции можно выполнять только над тензорами, заданными в одной и той же точке.

Поступим следующим образом. Перенесем базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ параллельно себе из точки M' в точку M и вместе с базисом "перенесем" сам тензор $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M')$. Иными словами, в точке M мы рассматриваем новый базис $\mathbf{e}'_{\alpha}$ и заданный в этом базисе тензор $Q'^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M)$, компоненты которого равны компонентам $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M')$ Теперь оба тензора $Q'^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M)$ и $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M)$ заданы уже в одной и той же точке, но в разных базисах, и их можно сравнивать, предварительно записав в одном и том же базисе. Обозначая компоненты $Q'^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}(M)$ в базисе $\mathbf{e}_{\alpha}$ через $\tilde{Q}^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\beta}$, и учитывая, что при преобразовании из базиса $\mathbf{e}'_{\alpha}$ в базис $\mathbf{e}_{\alpha}$ ковариантные компоненты преобразуются матрицей **B**, а контравариантные компоненты преобразуются матрицей **A**, имеем (см. 1.3;17):

$$\tilde{Q}^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}(M) = A^{\alpha}_{\cdot\,\mu} B^{\nu}_{\cdot\,\beta} Q'^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu}(M) = \left(\delta^{\alpha}_{\cdot\,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} dx^{\kappa}\right)\left(\delta^{\nu}_{\cdot\,\beta} - \Gamma^{\nu}_{\kappa\beta} dx^{\kappa}\right) Q'^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu}(M). \qquad (8)$$

Отбрасывая квадратичные относительно dx^{κ} члены, получим:

$$\tilde{Q}^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}(M) = Q'^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} Q'^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\beta}\, dx^{\kappa} - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta} Q'^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\gamma}\, dx^{\kappa} \qquad (9)$$

и, так как $Q'^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} = Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} + \dfrac{\partial Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda}$, окончательно имеем:

$$\tilde{Q}^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} = Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} + \frac{\partial Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} Q^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\beta}\, dx^{\kappa} - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta} Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\gamma}\, dx^{\kappa}. \qquad (10)$$

Назовём теперь *абсолютным дифференциалом тензора* $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$ тензор $\mathcal{D}Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$:

$$\mathcal{D}Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} = \tilde{Q}^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} - Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} = \left(\frac{\partial Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\gamma} Q^{\gamma\,\cdot}_{\cdot\,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta} Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\gamma}\right) dx^{\kappa}. \qquad (11)$$

В силу тензорного признака (см. (1.6; 4)) совокупность:

$$\nabla_{\kappa} Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} = \frac{\partial Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\gamma} Q^{\gamma\,\cdot}_{\cdot\,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta} Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\gamma} \qquad (12)$$

будет тензором; она называется *ковариантной производной тензора* $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$.

Легко проверить, что совокупность $\dfrac{\partial Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}}{\partial x^{\kappa}}$ не является тензором. Дело в том, что при переходе к близкой точке на изменение самой совокупности накладывается еще и изменение, обусловленное выбором определенной системы координат (изменение базиса $\mathbf{e}_{\alpha}$ от точки к точке зависит, разумеется, от выбора системы координат). Благодаря введению дополнительных членов в (11) и (12) с множителями $\Gamma^{\alpha}_{\kappa\gamma}$ удается, как мы показали, выделить инвариантную часть изменения $Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$.

Очевидно, что для скаляра q ковариантная производная есть просто:

$$\nabla_{\kappa} q = \frac{\partial q}{\partial x^{\kappa}}. \tag{13}$$

Для контравариантных компонент q^{α} вектора $\mathbf{q}$:

$$\nabla_{\kappa} q^{\alpha} = \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\gamma} q^{\gamma}. \tag{14а}$$

Для ковариантных компонент q_{α} вектора $\mathbf{q}$:

$$\nabla_{\kappa} q_{\alpha} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\alpha} q_{\gamma}. \tag{14б}$$

В общем случае можно показать, что (см. McConnell, 1957; стр. 145, формула (13); стр147, формула (16):

$$\begin{aligned}\nabla_{\kappa} Q^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\,\beta_1\ldots\beta_s} = {} & \frac{\partial Q^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\,\beta_1\ldots\beta_s}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\alpha_1}_{\kappa\gamma} Q^{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\cdot\,\ldots\,\cdot\,\beta_1\ldots\beta_s} + \ldots + \Gamma^{\alpha_r}_{\kappa\gamma} Q^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\gamma}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\,\cdot\,\beta_1\ldots\beta_s} \\ & - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta_1} Q^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\,\gamma\beta_2\ldots\beta_s} - \ldots - \Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta_s} Q^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\,\beta_1\ldots\beta_{s-1}\gamma}\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что для каждого верхнего индекса (например, α_j) составляется дополнительный член со знаком плюс типа:

$$\Gamma^{\alpha_j}_{\kappa\gamma} Q^{\alpha_1\ldots\gamma\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\ldots\cdot\,\beta_1\ldots\beta_s}, \tag{16а}$$

а для каждого нижнего индекса (например, β_j) – дополнительный член со знаком минус типа:

$$\Gamma^{\gamma}_{\kappa\beta_j} Q^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\cdot\,\ldots\,\cdot\,\beta_1\ldots\gamma\ldots\beta_s}. \tag{16б}$$

Общее число таких дополнительных членов равно рангу тензора Q. Отметим также, что у тензора ковариантной производной число нижних индексов и ранг увеличиваются на единицу.

1.9 *Символы Кристоффеля*

Смотри (Корн, Корн 1973; раздел 16.10–3, стр. 512; McConnell 1957; Ch. X11, p. 155).

1. *Символами Кристоффеля первого рода*, $[ij;p] = \Gamma_{ij,p}$, называются следующие функции координат x^1, x^2, x^3:

$$[ij;p]=\Gamma_{ij,p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ip}}{\partial x^j}+\frac{\partial m_{jp}}{\partial x^i}-\frac{\partial m_{ij}}{\partial x^p}\right). \quad (1)$$

Ограничимся ортогональными координатами, для которых $m_{ij}=0$, если $i\neq j$.

Приведем таблицу 2, рассчитанную с учетом $m_{ij}=0$, если $i\neq j$.

Таблица 2. $\Gamma_{ij,p}$ для ортогональных координат x^1,x^2,x^3.

$[11;1]=\Gamma_{11,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial m_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial x^1}$
$[12;1]=\Gamma_{12,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial m_{21}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{12}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2}$
$[13;1]=\Gamma_{13,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{31}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{13}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3}$
$[22;1]=\Gamma_{22,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial m_{21}}{\partial x^2}-\frac{\partial m_{22}}{\partial x^1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial x^1}$
$[23;1]=\Gamma_{23,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{31}}{\partial x^2}-\frac{\partial m_{23}}{\partial x^1}\right)=0$
$[33;1]=\Gamma_{33,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{31}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{31}}{\partial x^3}-\frac{\partial m_{33}}{\partial x^1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{33}}{\partial x^1}$
$[11;2]=\Gamma_{11,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial m_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2}$
$[12;2]=\Gamma_{12,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial m_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{12}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial x^1}$
$[13;2]=\Gamma_{13,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{12}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{32}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{13}}{\partial x^2}\right)=0$
$[22;2]=\Gamma_{22,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial m_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial m_{22}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial x^2}$
$[23;2]=\Gamma_{23,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{32}}{\partial x^2}-\frac{\partial m_{23}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3}$
$[33;2]=\Gamma_{33,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{32}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{32}}{\partial x^3}-\frac{\partial m_{33}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{33}}{\partial x^2}$
$[11;3]=\Gamma_{11,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial m_{13}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3}$
$[12;3]=\Gamma_{12,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{13}}{\partial x^2}+\frac{\partial m_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{12}}{\partial x^3}\right)=0$
$[13;3]=\Gamma_{13,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{13}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial m_{13}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{33}}{\partial x^1}$
$[22;3]=\Gamma_{22,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{23}}{\partial x^2}+\frac{\partial m_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3}$
$[23;3]=\Gamma_{23,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{23}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial m_{23}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{33}}{\partial x^2}$
$[33;3]=\Gamma_{33,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{33}}{\partial x^3}+\frac{\partial m_{33}}{\partial x^3}-\frac{\partial m_{33}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{33}}{\partial x^3}$

2. *Символами Кристоффеля второго рода* $\left\{ {r \atop ij} \right\}=\Gamma^r_{ij}$ называются следующие функции координат:

$$\{^{r}_{ij}\} = \Gamma^{r}_{ij} = m^{rp}\Gamma_{ij,p} = m^{rp}[ij;p]. \qquad (2)$$

Используя (1), получим для ортогональных координат x^1, x^2, x^3 таблицу 3.

Таблица 3. Γ^{r}_{ij} для ортогональных координат x^1, x^2, x^3

$\Gamma^1_{11} = m^{11}[11;1] = \frac{1}{2} m^{11} \frac{\partial m_{11}}{\partial x^1}$
$\Gamma^1_{12} = m^{11}[12;1] = \frac{1}{2} m^{11} \frac{\partial m_{11}}{\partial x^2}$
$\Gamma^1_{13} = m^{11}[13;1] = \frac{1}{2} m^{11} \frac{\partial m_{11}}{\partial x^3}$
$\Gamma^1_{22} = m^{11}[22;1] = -\frac{1}{2} m^{11} \frac{\partial m_{22}}{\partial x^1}$
$\Gamma^1_{23} = m^{11}[23;1] = 0$
$\Gamma^1_{33} = m^{11}[33;1] = -\frac{1}{2} m^{11} \frac{\partial m_{33}}{\partial x^1}$
$\Gamma^2_{11} = m^{22}[11;2] = -\frac{1}{2} m^{22} \frac{\partial m_{11}}{\partial x^2}$
$\Gamma^2_{12} = m^{22}[12;2] = \frac{1}{2} m^{22} \frac{\partial m_{22}}{\partial x^1}$
$\Gamma^2_{13} = m^{22}[13;2] = 0$
$\Gamma^2_{22} = m^{22}[22;2] = \frac{1}{2} m^{22} \frac{\partial m_{22}}{\partial x^2}$
$\Gamma^2_{23} = m^{22}[23;2] = \frac{1}{2} m^{22} \frac{\partial m_{22}}{\partial x^3}$
$\Gamma^2_{33} = m^{22}[33;2] = -\frac{1}{2} m^{22} \frac{\partial m_{33}}{\partial x^2}$
$\Gamma^3_{11} = m^{33}[11;3] = -\frac{1}{2} m^{33} \frac{\partial m_{11}}{\partial x^3}$
$\Gamma^3_{12} = m^{33}[12;3] = 0$
$\Gamma^3_{13} = m^{33}[13;3] = \frac{1}{2} m^{33} \frac{\partial m_{33}}{\partial x^1}$
$\Gamma^3_{22} = m^{33}[22;3] = -\frac{1}{2} m^{33} \frac{\partial m_{22}}{\partial x^3}$
$\Gamma^3_{23} = m^{33}[23;3] = \frac{1}{2} m^{33} \frac{\partial m_{33}}{\partial x^2}$
$\Gamma^3_{33} = m^{33}[33;3] = \frac{1}{2} m^{33} \frac{\partial m_{33}}{\partial x^3}$

1.10 *e – символы (символы Леви-Чивита)*

Определим сначала δ – символы Кронекера ранга $R = 2r = 6$, компоненты которого задаются следующим образом:

1. $\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 k_3} = +1$ или –1 если все верхние и все нижние индексы i_1, i_2, i_3 различны, и система нижних индексов k_1, k_2, k_3 получена соответственно четным или нечетным числом транспозиций из системы верхних индексов.

2. $\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 k_3} = 0$ для всех других комбинаций верхних и нижних индексов.

Особенно важную роль играют δ – символы Кронекера ранга 2:

$$\delta^i_k = \begin{cases} 0, \; i \neq k \\ 1, \; i = k \end{cases}. \tag{1}$$

Символ считается кососимметричным (антисимметричным) по какой либо паре верхних или какой либо паре нижних индексов, например, j_1 и j_2, если:

$$Q(j_1 = i, j_2 = k, j_3, \ldots, j_R) = -Q(j_1 = k, j_2 = i, j_3, \ldots, j_R), \tag{2}$$

для всех значений $i, k, j_3, \ldots, j_R$ от 1 до 3.

Символ считается абсолютно антисимметричным по всем индексам, если он антисимметричен по любой паре верхних и по любой паре нижних индексов. Каждый δ – символ Кронекера абсолютно антисимметричен. Все δ – символы Кронекера ранга $r > 3$, $R = 2r > 6$ равны нулю.

e – символы Леви-Чивита определяются следующими формулами:

$$e^{ijk} = \delta^{ijk}_{123} \quad \text{и} \quad e_{ijk} = \delta^{123}_{ijk}. \tag{3}$$

1. $e^{ijk} = 0$, $e_{ijk} = 0$ если среди индексов i, j, k имеются хотя бы два одинаковых.

2. $e^{ijk} = 1$, $e_{ijk} = 1$ если упорядоченная система индексов i, j, k отличается от 1, 2, 3 четным числом транспозиций.

3. $e^{ijk} = -1$, $e_{ijk} = -1$ если упорядоченная система индексов i, j, k отличается от 1, 2, 3 нечетным числом транспозиций.

2. Определение основных дифференциальных операторов

2.1 *Произведение векторов*

Хорошо известно, что в прямоугольной декартовой системе координат *x, y, z* с базисом $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ вводятся:

1. скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ как:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \tag{1}$$

2. векторное произведение (правое) двух векторов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение (2) можно формально переписать как:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a},$$

где $|\bullet| = \det(\bullet)$ обозначает определитель матрицы.

3. Правое смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

где предполагается, что векторы $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ образуют правую тройку.

В общем случае произвольных координат $x^\alpha = x^\alpha(x,y,z)$; $\alpha = 1,2,3$ с локальным базисом $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ имеем следующие определения:

1. Скалярным произведением двух векторов называется скаляр:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = m_{ik}(x^1,x^2,x^3)a^i(x^1,x^2,x^3)b^k(x^1,x^2,x^3) = a_k b^k = a^i b_i = m^{ik}a_i b_k = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}. \qquad (4)$$

2. Векторным произведением $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ двух векторов называется вектор $\mathbf{c}$ с компонентами (определения символов e^{ijk} или e_{ijk}, см. раздел 1.10):

$$c^k = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{ijk} a_i b_j = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m}} e^{ijk}(a_i b_j - a_j b_i) \qquad (5а)$$

или

$$c_k = \sqrt{m}\; e_{ijk} a^i b^j = \frac{1}{2}\sqrt{m}\; e^{ijk}(a^i b^j - a^j b^i), \qquad (5б)$$

где m – определитель матрицы $m_{\alpha\beta}$ (см. раздел 1.4). Формулы (5 а,б) можно формально переписать как:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{m}\begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

3. Смешанное произведение трех векторов $[\mathbf{abc}]$ определяется следующим образом:

$$[\mathbf{abc}] = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sqrt{m}\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{ijk} a_i b_j c_k = \sqrt{m}\; e_{ijk} a^i b^j c^k. \qquad (6)$$

В частности:

$$[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3] = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = \sqrt{m}.$$

Вводя физические компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. раздел 1.4):

$$m_{11} = h_1^2,\; m_{22} = h_2^2,\; m_{33} = h_3^2,$$

$$a^1 = \frac{\hat{a}_1}{h_1},\; a^2 = \frac{\hat{a}_2}{h_2},\; a^3 = \frac{\hat{a}_3}{h_3},$$

и аналогично для вектора $\mathbf{b}$, имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат x^1, x^2, x^3 согласно (4):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = m_{11}a^1b^1 + m_{22}a^2b^2 + m_{33}a^3b^3 = \hat{a}_1\hat{b}_1 + \hat{a}_2\hat{b}_2 + \hat{a}_3\hat{b}_3 \,. \tag{7а}$$

2. Сферическая система координат λ, φ, r ; $h_1 = r\cos(\varphi),\ h_2 = r,\ h_3 = 1$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \hat{a}_\lambda\hat{b}_\lambda + \hat{a}_\varphi\hat{b}_\varphi + \hat{a}_r\hat{b}_r \,. \tag{7б}$$

3. Псевдо – сферическая система координат, λ, φ, z ; $h_1 = r_0\cos(\varphi),\ h_2 = r_0,\ h_3 = 1$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \hat{a}_\lambda\hat{b}_\lambda + \hat{a}_\varphi\hat{b}_\varphi + \hat{a}_z\hat{b}_z \,. \tag{7в}$$

Здесь и далее мы вводим в рассмотрение термин псевдо – сферическая система координат. Так обозначена система координат в книге (Mueller 2006), в которой r в коэффициентах Ламе в сферической системе координат заменяется постоянным значением r_0. Это приближение было впервые указано Н. Филлипсом (Phillips 1966; см. также обсуждение в Veronis 1968).

В случае с векторным произведением $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \hat{a}_2\hat{b}_3 - \hat{a}_3\hat{b}_2 \\ \hat{c}_2 &= \hat{a}_3\hat{b}_1 - \hat{a}_1\hat{b}_3 \\ \hat{c}_3 &= \hat{a}_1\hat{b}_2 - \hat{a}_2\hat{b}_1 \,. \end{aligned} \tag{8а}$$

2. Сферическая система координат:

$$\begin{aligned} \hat{c}_\lambda &= \hat{a}_\varphi\hat{b}_r - \hat{a}_r\hat{b}_\varphi \\ \hat{c}_\varphi &= \hat{a}_r\hat{b}_\lambda - \hat{a}_\lambda\hat{b}_r \\ \hat{c}_r &= \hat{a}_\lambda\hat{b}_\varphi - \hat{a}_\varphi\hat{b}_\lambda \,. \end{aligned} \tag{8б}$$

3. Псевдо – сферическая система координат:

$$\begin{aligned} \hat{c}_\lambda &= \hat{a}_\varphi\hat{b}_z - \hat{a}_z\hat{b}_\varphi \\ \hat{c}_\varphi &= \hat{a}_z\hat{b}_\lambda - \hat{a}_\lambda\hat{b}_z \\ \hat{c}_z &= \hat{a}_\lambda\hat{b}_\varphi - \hat{a}_\varphi\hat{b}_\lambda \,. \end{aligned} \tag{8в}$$

В случае правого смешанного произведения $[\mathbf{abc}]$ (см. Корн, и Корн (1973; таблица 16.8–11):

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 \\ \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & \hat{c}_3 \end{vmatrix} . \tag{9}$$

Приведенные формулы (1)–(9) по определению представляют тензоры. Важно, что при переходе в систему прямоугольных декартовых координат, соблюдая все тензорные правила и считая $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, мы получаем в точности формулы (1)–(3). Это подтверждает справедливость общих тензорных формул.

2.2 *Дивергенция вектора*

В прямоугольных декартовых координатах x, y, z дивергенция вектора **a** равна:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{1}$$

где a_x, a_y, a_z – компоненты вектора **a** по осям x, y, z. Очевидно, что в тензорной форме, пригодной в произвольной системе координат x^1, x^2, x^3, разумно положить:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla_\alpha a^\alpha. \tag{2}$$

Напишем сначала выражение для ковариантной производной вектора a^α:

$$\nabla_\beta a^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\kappa\beta} a^\kappa. \tag{3}$$

Свертывая это выражение по α, β, имеем:

$$\nabla_\alpha a^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\kappa\alpha} a^\kappa = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3} + \Gamma^\alpha_{1\alpha} a^1 + \Gamma^\alpha_{2\alpha} a^2 + \Gamma^\alpha_{3\alpha} a^3. \tag{4}$$

Далее с учетом таблицы 3 (раздел 1.9) в произвольной ортогональной криволинейной системе координат:

$$\Gamma^\alpha_{1\alpha} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^1} = \frac{\partial \ln h_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \ln h_2}{\partial x^1} + \frac{\partial \ln h_3}{\partial x^1} = \frac{\partial \ln(h_1 h_2 h_3)}{\partial x^1} = \frac{\partial \ln(\sqrt{m})}{\partial x^1}. \tag{5}$$

Учитывая (4) и (5), получим:

$$\frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \Gamma^\alpha_{1\alpha} a^1 = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial \sqrt{m}}{\partial x^1} a^1 = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^1)}{\partial x^1}, \tag{6а}$$

где $\sqrt{m} = h_1 h_2 h_3$ (см. раздел 1.4). Подобные преобразования дают:

$$\frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \Gamma^\alpha_{2\alpha} a^2 = \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial \sqrt{m}}{\partial x^2} a^2 = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^2)}{\partial x^2}, \tag{6б}$$

$$\frac{\partial a^3}{\partial x^3} + \Gamma^\alpha_{3\alpha} a^3 = \frac{\partial a^3}{\partial x^3} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial \sqrt{m}}{\partial x^3} a^3 = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^3)}{\partial x^3}. \tag{6в}$$

Окончательно:

$$\nabla_\alpha a^\alpha = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^\alpha)}{\partial x^\alpha}. \tag{7}$$

Переходя к физическим компонентам вектора **a** (см. раздел 1.4), получим:

1. В произвольной ортогональной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial(h_2 h_3 \hat{a}_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 \hat{a}_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 \hat{a}_3)}{\partial x^3}\right\}. \tag{8а}$$

2. В сферической системе координат (λ, φ, r; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial \hat{a}_\lambda}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_\varphi\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\hat{a}_r r^2)}{\partial r}. \tag{8б}$$

3. В псевдо–сферической системе координат (λ, φ, z; $h_1 = r_0 \cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial \hat{a}_\lambda}{r_0 \cos\varphi \partial\lambda} + \frac{1}{r_0 \cos\varphi} \frac{\partial(\hat{a}_\varphi \cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial \hat{a}_z}{\partial z}. \tag{8в}$$

В прямоугольной декартовой системе координат мы получаем формулу (1).

2.3 *Дивергенция симметрического тензора второго ранга*

По определению дивергенция симметрического тензора второго ранга $\operatorname{Div} a^{\alpha\beta}$ равна:

$$\operatorname{Div} a^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha a^{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Выпишем сначала выражение для ковариантной производной $a^{\alpha\kappa}$ (см. раздел 1.8):

$$\nabla_\beta a^{\alpha\kappa} = \frac{\partial a^{\alpha\kappa}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{p\beta} a^{p\kappa} + \Gamma^\kappa_{p\beta} a^{\alpha p}. \tag{2}$$

Свертывая по индексам α, β, имеем:

$$b^\kappa = \nabla_\alpha a^{\alpha\kappa} = \frac{\partial a^{\alpha\kappa}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{p\alpha} a^{p\kappa} + \Gamma^\kappa_{p\alpha} a^{\alpha p}. \tag{3}$$

Можно показать, что в произвольной ортогональной системе координат (см. 2.2; 5 и 6):

$$\frac{\partial a^{\alpha\kappa}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{p\alpha} a^{p\kappa} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(\sqrt{m} a^{\alpha\kappa})}{\partial x^\alpha}. \tag{4}$$

Далее получим:

$$b^\kappa = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(\sqrt{m} a^{\alpha\kappa})}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\kappa_{p\alpha} a^{\alpha p}, \tag{5}$$

где

$$a^{\alpha\beta}\Gamma^\kappa_{\alpha\beta} = a^{11}\Gamma^\kappa_{11} + a^{12}\Gamma^\kappa_{12} + a^{21}\Gamma^\kappa_{21} + a^{13}\Gamma^\kappa_{13} + a^{31}\Gamma^\kappa_{31} + a^{22}\Gamma^\kappa_{22} + a^{32}\Gamma^\kappa_{32} + a^{23}\Gamma^\kappa_{23} + a^{33}\Gamma^\kappa_{33}. \tag{6}$$

Мы предполагаем выразить окончательную формулу через физические компоненты тензора $a^{\alpha\beta}$. Для этого надо внести h_1^2 под знак производной*. Используем следующие тождественные соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(\sqrt{m} a^{11})}{\partial x^1} + 2a^{11} \frac{1}{h_1^2} h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x^1} = \frac{1}{h_1^2} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(h_1^2 \sqrt{m} a^{11})}{\partial x^1}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(\sqrt{m} a^{12})}{\partial x^2} + 2a^{12}\Gamma^1_{12} = \frac{1}{h_1^2} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(h_1^2 \sqrt{m} a^{12})}{\partial x^2}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(\sqrt{m} a^{31})}{\partial x^3} + 2a^{31}\Gamma^1_{31} = \frac{1}{h_1^2} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial(h_1^2 \sqrt{m} a^{31})}{\partial x^3}, \tag{9}$$

при выводе которых мы приняли во внимание симметричность тензора $a^{\alpha\beta}$ и соот-

* В отличие от других переменных верхний индекс у h равен степени, в которую возводится h.

ношение (5). С учетом таблицы 3 (раздел 1.9), имеем:

$$b^1 = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{\alpha 1})}{\partial x^\alpha} + \Gamma^1_{p\alpha}a^{\alpha p} = \frac{1}{h_1^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_1^2\sqrt{m}a^{11})}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_1^2\sqrt{m}a^{12})}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_1^2\sqrt{m}a^{13})}{\partial x^3}\right.$$

$$\left. -h_1^2\frac{\partial \ln h_1}{\partial x^1}a^{11} - h_2^2\frac{\partial \ln h_2}{\partial x^1}a^{22} - h_3^2\frac{\partial \ln h_3}{\partial x^1}a^{33}\right\}. \tag{10}$$

Определим b^2,

$$b^2 = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{\alpha 2})}{\partial x^\alpha} + \Gamma^2_{p\alpha}a^{\alpha p}. \tag{11}$$

Чтобы ввести h_2^2 под знак производной, используем следующие тождественные соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{12})}{\partial x^1} + 2a^{12}\frac{1}{h_1^2}h_2\frac{\partial h_2}{\partial x^1} = \frac{1}{h_2^2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_2^2\sqrt{m}a^{12})}{\partial x^1}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{22})}{\partial x^2} + 2a^{22}\Gamma^2_{22} = \frac{1}{h_2^2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_2^2\sqrt{m}a^{22})}{\partial x^2}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{32})}{\partial x^3} + 2a^{32}\Gamma^3_{33} = \frac{1}{h_2^2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_2^2\sqrt{m}a^{32})}{\partial x^3}. \tag{14}$$

Расписывая суммы в правой части (11) и используя (12) – (14), получим с учетом (5), симметричности тензора $a^{\alpha\beta}$ и таблицы 3 (раздел 1.9):

$$b^2 = \frac{1}{h_2^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_2^2\sqrt{m}a^{12})}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_2^2\sqrt{m}a^{22})}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_2^2\sqrt{m}a^{32})}{\partial x^3}\right.$$

$$\left. -h_1^2\frac{\partial \ln h_1}{\partial x^2}a^{11} - h_2^2\frac{\partial \ln h_2}{\partial x^2}a^{22} - h_3^2\frac{\partial \ln h_3}{\partial x^2}a^{33}\right\}. \tag{15}$$

Определим b^3:

$$b^3 = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{\alpha 3})}{\partial x^\alpha} + \Gamma^3_{p\alpha}a^{\alpha p}. \tag{16}$$

Чтобы ввести h_3^2 под знак производной, используем следующие тождественные соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{13})}{\partial x^1} + 2a^{13}\frac{1}{h_3^2}h_3\frac{\partial h_3}{\partial x^1} = \frac{1}{h_3^2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_3^2\sqrt{m}a^{13})}{\partial x^1}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{23})}{\partial x^2} + 2a^{23}\Gamma^2_{23} = \frac{1}{h_3^2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_3^2\sqrt{m}a^{23})}{\partial x^2}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(\sqrt{m}a^{33})}{\partial x^3} + 2a^{33}\Gamma^3_{33} = \frac{1}{h_3^2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_3^2\sqrt{m}a^{33})}{\partial x^3}. \tag{19}$$

Расписывая суммы в правой части (16) и используя (17)–(19), получим с учетом (5), симметричности тензора $a^{\alpha\beta}$ и таблицы 3 (раздел 1.9):

$$b^3 = \frac{1}{h_3^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_3^2\sqrt{m}a^{13})}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_3^2\sqrt{m}a^{23})}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial(h_3^2\sqrt{m}a^{33})}{\partial x^3}\right.$$
$$\left. - h_1^2\frac{\partial \ln h_1}{\partial x^3}a^{11} - h_2^2\frac{\partial \ln h_2}{\partial x^3}a^{22} - h_3^2\frac{\partial \ln h_3}{\partial x^3}a^{33}\right\}. \quad (20)$$

Собирая вместе формулы (10), (15), (20) и переходя к физическим компонентам, получаем с учетом (3) формулы для $\hat{b}_\kappa$ в произвольной ортогональной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3:

$$\hat{b}_\kappa = \frac{1}{h_\kappa}\sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{h_1h_2h_3h_\kappa}{h_\alpha}\hat{a}_{\kappa\alpha}\right) - \hat{a}_{\alpha\alpha}\frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial x^\kappa}\right\}. \quad (21)$$

Имеем также:

1. Сферическая система координат (λ, φ, r; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_\lambda = \frac{\partial \hat{a}_{\lambda\lambda}}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos^2\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_{\lambda\varphi}\cos^2\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial(r^3\hat{a}_{\lambda r})}{\partial r}, \quad (22а)$$

$$\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}_{\varphi\lambda}}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_{\varphi\varphi}\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial(r^3\hat{a}_{\varphi r})}{\partial r} + \frac{\hat{a}_{\lambda\lambda}}{r}\operatorname{tg}\varphi, \quad (22б)$$

$$\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_r = \frac{\partial \hat{a}_{r\lambda}}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_{r\varphi}\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\hat{a}_{rr})}{\partial r} - \frac{\hat{a}_{\lambda\lambda} + \hat{a}_{\varphi\varphi}}{r}. \quad (22в)$$

2. Псевдо-сферическая система координат (λ, φ, z; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_\lambda = \frac{\partial \hat{a}_{\lambda\lambda}}{r_0\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r_0\cos^2\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_{\lambda\varphi}\cos^2\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial \hat{a}_{\lambda r}}{\partial z}, \quad (23а)$$

$$\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}_{\varphi\lambda}}{r_0\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_{\varphi\varphi}\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial \hat{a}_{\varphi r}}{\partial r}, \quad (23б)$$

$$\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_z = \frac{\partial \hat{a}_{r\lambda}}{r_0\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial(\hat{a}_{r\varphi}\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial \hat{a}_{rr}}{\partial z}. \quad (23в)$$

3. Декартовы прямоугольные координаты *x, y, z*. Все h равны и постоянны:

$$\begin{matrix}\left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_x \\ \left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_y \\ \left(\widehat{\nabla_\alpha a^{\alpha\kappa}}\right)_z\end{matrix} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{31}\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{22} \\ \hat{a}_{32}\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{33}\end{pmatrix}. \quad (24)$$

2.4 *Градиент скалярной функции*

По определению назовем $\nabla_\alpha a$ градиентом скалярной функции a. С учетом (1.8; 13) имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная координат ($x^1, x^2, x^3; h_1, h_2, h_3$):

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_\alpha = \widehat{\nabla_\alpha} \hat{a} = \frac{\partial \hat{a}}{h_\alpha \partial x^\alpha}. \tag{1}$$

2. Сферическая система координат (λ, φ, r; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_\lambda = \frac{\partial \hat{a}}{r\cos\varphi \partial \lambda}, \tag{2а}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}}{r \partial \varphi}, \tag{2б}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_r = \frac{\partial \hat{a}}{\partial r}. \tag{2в}$$

3. Псевдо-сферическая система координат (λ, φ, z; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_\lambda = \frac{\partial \hat{a}}{r_0\cos\varphi \partial \lambda}, \tag{3а}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}}{r_0 \partial \varphi}, \tag{3б}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{grad} a}\right)_z = \frac{\partial \hat{a}}{\partial z}. \tag{3в}$$

2.5 *Вихрь векторного поля*

Начнем с формулировки вихря векторного поля в прямоугольной декартовой системе координат *x, y, z*. Имеем для точки M', близкой к точке *M*:

$$\begin{aligned} u(M') = u(M) &+ \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \underline{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \underline{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)dz\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \underline{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \underline{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)dz\right], \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} v(M') = v(M) &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \underline{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)dx + 2\frac{\partial v}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \underline{\frac{\partial w}{\partial y}}\right)dz\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \underline{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \underline{\frac{\partial w}{\partial y}}\right)dz\right], \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} w(M') = w(M) &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \underline{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \underline{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)dy + 2\frac{\partial w}{\partial z}dz\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \underline{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \underline{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)dy\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где *u, v, w* – компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ в системе координат *x, y, z* и $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = \mathbf{OM'} - \mathbf{OM}$. Подчеркнутые члены в каждой строчке этих соотношений уничтожают друг друга и оставшиеся члены дают не что иное, как линейную часть разложений $u(M')$, $v(M')$, $w(M')$ в ряд Тейлора. Мы полагаем, что точка M' достаточно близка к точке *M*, так что линейная часть разложений Тейлора дает достаточное приближение для нашего анализа. Заметим, что все производные вычисляются в точке *M*. Нетрудно показать, что содержимое квадратных скобок в первых строчках выражений (1)–(3) описывает деформацию жидкой частицы (см. Кочин и др. 1963; Часть I, Глава первая, параграфы 1–5)). Таким образом, движение жидкой частицы в малом состоит из поступательного движения со скоростью $u(M)$, $v(M)$, $w(M)$; чисто деформационного движения; и твердотельного вращения с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\omega(M)$:

$$\omega_x = (\operatorname{rot}\mathbf{u})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{4а}$$

$$\omega_y = (\operatorname{rot}\mathbf{u})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{4б}$$

$$\omega_z = (\operatorname{rot}\mathbf{u})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4в}$$

где мы используем обозначение $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$

Определим теперь тензорную формулу для $\operatorname{rot}\mathbf{u}$. В силу формулы (2.1; 5а) векторное произведение двух векторов можно представить как свертку е – символа и антисимметричного тензора второго ранга:

$$\omega^k = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}} e^{k\beta\gamma}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta)$$

или

$$\omega^1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}} e^{1\beta\gamma}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right),$$
$$\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}} e^{2\beta\gamma}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right),$$
$$\omega^3 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}} e^{3\beta\gamma}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|m|}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right).$$

Для физических компонент векторов $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$ имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3; h_1, h_2, h_3):

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial h_3 \hat{a}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial h_2 \hat{a}_2}{\partial x^3}\right\}, \tag{5а}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_2 = \frac{1}{h_1 h_3}\left\{\frac{\partial h_1 \hat{a}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial h_3 \hat{a}_3}{\partial x^1}\right\}, \tag{5б}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial h_2 \hat{a}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1 \hat{a}_1}{\partial x^2}\right\}. \tag{5в}$$

2. Сферическая система координат (λ,φ,r ; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_\lambda = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r \hat{a}_\varphi}{\partial r}\right\}, \tag{6а}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_\varphi = \frac{1}{r\cos\varphi}\left\{\frac{\partial r\cos\varphi \hat{a}_\lambda}{\partial r} - \frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \lambda}\right\}, \tag{6б}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_r = \frac{1}{r\cos\varphi}\left\{\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \cos\varphi \hat{a}_\lambda}{\partial \varphi}\right\}. \tag{6в}$$

3. Псевдо-сферическая система координат (λ,φ,z ; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_\lambda = \frac{1}{r_0}\frac{\partial \hat{a}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial z}, \tag{7а}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial z} - \frac{1}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \lambda}, \tag{7б}$$

$$\left(\widehat{\operatorname{rot} a}\right)_z = \frac{1}{r_0\cos\varphi}\left\{\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \cos\varphi \hat{a}_\lambda}{\partial \varphi}\right\}. \tag{7в}$$

2.6 *Тензор скоростей деформации*

Обратимся снова к соотношениям (1)–(3) предыдущего раздела 2.5. Эти соотношения можно переписать в виде:

$$u_\alpha(M') = u_\alpha(M) + \frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{u}\times\delta\mathbf{r})_\alpha + \frac{1}{2}e_{\alpha\beta}\delta r^\beta, \tag{1}$$

где

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha}; \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{OM}' - \mathbf{OM}. \tag{2}$$

Расстановка индексов в (1) удобна для дальнейшего изложения, хотя в прямоугольной декартовой системе координат безразлично, конечно, где ставить индексы – вверху или внизу (не нарушая соглашения о суммировании).

Согласно (1), тензор скоростей деформации описывает отличие движения жидкой частицы от движения ее как твердого тела. Напомним, что тензор e_{ab} в прямоугольных декартовых координатах (см. (2)) может быть представлен в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x^3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x^1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x^2} & 2\dfrac{\partial u_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x^3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x^1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x^3} & 2\dfrac{\partial u_3}{\partial x^3} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Диагональные члены в этой матрице описывают растяжение вдоль координатных векторов, внедиагональные члены – описывают скашивание прямых углов между координатными осями.

В силу признака тензора (см. 1.6; 4) естественно определить тензор скоростей деформации $e_{\alpha\beta}$ в общей тензорной форме как:

$$e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha . \tag{4}$$

Подставляя определение (4) в (1), получаем тензорное соотношение справедливое в любой системе координат, поскольку это соотношение заведомо справедливо в прямоугольной декартовой системе координат.

Для удобства введем следующие тензоры:

$$\mathscr{D}^{i\,\cdot}_{\cdot\,k} = \nabla_k u^i . \tag{5}$$

Согласно формулам ковариантного дифференцирования (см. раздел 1.8 в первой части этой статьи):

$$\mathscr{D}^{i\,\cdot}_{\cdot\,k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{k\gamma} u^\gamma . \tag{6}$$

Общая формула для символов Кристоффеля $\Gamma^i_{k\gamma}$ такова (см. 1.8; 3):

$$\Gamma^i_{k\gamma} = \frac{1}{2} m^{i\nu} \left(\frac{\partial m_{\nu k}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial m_{\nu\gamma}}{\partial x^k} - \frac{\partial m_{k\gamma}}{\partial x^\nu} \right). \tag{7}$$

В выражении (6) индексы i и k заданы; γ – немой индекс (γ=1,2,3); в ортогональной криволинейной системе координатn ν=i (если $\nu \neq i$, то $m^{i\nu} = 0$).

Рассмотрим случаи, когда $i \neq k$:

$$i = 1;\ k = 2$$

$$\nabla_2 u^1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m^{11} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2} u^1 - \frac{\partial m_{22}}{\partial x^1} u^2 \right);$$

$$i = 2;\ k = 1$$

$$\nabla_1 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{1}{2} m^{22} \left(-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2} u^1 + \frac{\partial m_{22}}{\partial x^1} u^2 \right);$$

$$i = 1;\ k = 3$$

$$\nabla_3 u^1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + \frac{1}{2} m^{11} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3} u^1 - \frac{\partial m_{33}}{\partial x^1} u^3 \right);$$

$$i = 3;\ k = 1$$

$$\nabla_1 u^3 = \frac{\partial u^3}{\partial x^1} + \frac{1}{2} m^{33} \left(-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3} u^1 + \frac{\partial m_{33}}{\partial x^1} u^3 \right);$$

$$i = 2;\ k = 3$$

$$\nabla_3 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + \frac{1}{2} m^{22} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3} u^2 - \frac{\partial m_{33}}{\partial x^2} u^3 \right);$$

$$i = 3;\ k = 2$$

$$\nabla_2 u^3 = \frac{\partial u^3}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m^{33} \left(-\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3} u^2 + \frac{\partial m_{33}}{\partial x^2} u^3 \right).$$

Мы ищем формулы для физических компонент тензора скоростей деформации. Поэтому мы сначала поднимем индекс k у тензора $\mathscr{D}^{1\cdot}_{\cdot 3}$. Имеем, в силу того, что $m^{13} = 0$ и $m^{23} = 0$:

$$\mathscr{D}^{13}_{\cdot\cdot} = \mathscr{D}^{1\cdot}_{\cdot 3} m^{33} = m^{33} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + \frac{1}{2} m^{33} m^{11} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3} u^1 - \frac{\partial m_{33}}{\partial x^1} u^3 \right). \tag{8}$$

По аналогии с этим случаем имеем:

$$\mathscr{D}^{31}_{\cdot\cdot} = \mathscr{D}^{3\cdot}_{\cdot 1} m^{11} = m^{11} \frac{\partial u^3}{\partial x^1} + \frac{1}{2} m^{11} m^{33} \left(-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^3} u^1 + \frac{\partial m_{33}}{\partial x^1} u^3 \right); \tag{9}$$

$$\mathscr{D}^{12}_{\cdot\cdot} = \mathscr{D}^{1\cdot}_{\cdot 2} m^{22} = m^{22} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m^{22} m^{11} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2} u^1 - \frac{\partial m_{22}}{\partial x^1} u^2 \right); \tag{10}$$

$$\mathscr{D}^{21}_{\cdot\cdot} = \mathscr{D}^{2\cdot}_{\cdot 1} m^{11} = m^{11} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{1}{2} m^{11} m^{22} \left(-\frac{\partial m_{11}}{\partial x^2} u^1 + \frac{\partial m_{22}}{\partial x^1} u^2 \right); \tag{11}$$

$$\mathscr{D}^{23}_{\cdot\cdot} = \mathscr{D}^{2\cdot}_{\cdot 3} m^{33} = m^{33} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + \frac{1}{2} m^{33} m^{22} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3} u^2 - \frac{\partial m_{33}}{\partial x^2} u^3 \right); \tag{12}$$

$$\mathscr{D}^{32}_{\cdot\cdot} = \mathscr{D}^{3\cdot}_{\cdot 2} m^{22} = m^{22} \frac{\partial u^3}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m^{22} m^{33} \left(-\frac{\partial m_{22}}{\partial x^3} u^2 + \frac{\partial m_{33}}{\partial x^2} u^3 \right). \tag{13}$$

Соединяя члены $\mathscr{D}^{31}_{\cdot\cdot}$ и $\mathscr{D}^{31}_{\cdot\cdot}$; $\mathscr{D}^{12}_{\cdot\cdot}$ и $\mathscr{D}^{21}_{\cdot\cdot}$; $\mathscr{D}^{23}_{\cdot\cdot}$ и $\mathscr{D}^{32}_{\cdot\cdot}$ и, переходя к физическим компонентам тензора e_{ik}, получим:

$$\sqrt{m_{11} m_{33}} \left(\mathscr{D}^{13}_{\cdot\cdot} + \mathscr{D}^{31}_{\cdot\cdot} \right) = h_1 h_3 \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + h_1 h_3 \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial u^3}{\partial x^1}, \tag{14}$$

$$\sqrt{m_{11} m_{22}} \left(\mathscr{D}^{12}_{\cdot\cdot} + \mathscr{D}^{21}_{\cdot\cdot} \right) = h_1 h_2 \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + h_1 h_2 \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial u^2}{\partial x^1}, \tag{15}$$

$$\sqrt{m_{22} m_{33}} \left(\mathscr{D}^{23}_{\cdot\cdot} + \mathscr{D}^{32}_{\cdot\cdot} \right) = h_2 h_3 \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + h_2 h_3 \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial u^3}{\partial x^2}. \tag{16}$$

Верхний индекс у коэффициентов Ламе h означает степень. Теперь мы вспомним определения разделов 1.4 и 1.5 и найдем окончательно:

$$\hat{e}_{ik} = \frac{h_i}{h_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{u}_k}{h_k} \right), \quad i \neq k.$$

Отметим, что в этом выражении для $\hat{e}_{ik}$, так же как и в последующих формулах в этом разделе, не производится суммирование по повторяющимся индексам i и по повторяющимся индексам k, если не указан знак суммы. Рассмотрим, наконец, случаи, когда $i=k$. Имеем:

$$\mathscr{D}^{i\cdot}_{\cdot i} = \nabla_i u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{i\gamma} u^\gamma, \tag{17}$$

$$\Gamma^i_{i\gamma} = \frac{1}{2} m^{ii} \left(\frac{\partial m_{ii}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial m_{i\gamma}}{\partial x^i} - \frac{\partial m_{i\gamma}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} m^{ii} \frac{\partial m_{ii}}{\partial x^\gamma}. \tag{18}$$

Итак, вспоминая определение коэффициентов Ламе в разделе 1.4, получим:

$$\Gamma^i_{i\gamma} u^\gamma = \frac{1}{2} \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial h_i^2}{\partial x^\gamma} u^\gamma = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^\gamma} u^\gamma$$

и, переходя к физическим компонентам, найдем:

$$\frac{1}{2} \hat{e}_{ii} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\hat{u}_k}{h_k h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^k}, \tag{19}$$

где вместо $\gamma = 1,2,3$ мы используем индекс $k = 1,2,3$. Имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3; h_1, h_2, h_3):

$$\hat{e}_{ik} = \frac{h_i}{h_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{u}_k}{h_k} \right), \quad i \neq k \tag{20а}$$

$$\frac{1}{2} \hat{e}_{ii} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\hat{u}_k}{h_k h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^k}. \tag{20б}$$

2. Сферическая система координат (λ, φ, r; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\hat{e}_{\lambda\varphi} = \hat{e}_{\varphi\lambda} = \cos\varphi \frac{\partial}{r\partial\varphi} \left(\frac{\hat{u}_\lambda}{\cos\varphi} \right) + \frac{1}{r\cos\varphi} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial\lambda}; \quad \hat{e}_{\lambda r} = \hat{e}_{r\lambda} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{u}_\lambda}{r} \right) + \frac{1}{r\cos\varphi} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial\lambda};$$

$$\hat{e}_{\varphi r} = \hat{e}_{r\varphi} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{u}_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial\varphi}; \tag{21}$$

$$\frac{1}{2} \hat{e}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{r\cos\varphi} \frac{\partial \hat{u}_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r} \mathrm{tg}\varphi + \frac{\hat{u}_r}{r}; \quad \frac{1}{2} \hat{e}_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{\hat{u}_r}{r}; \quad \frac{1}{2} \hat{e}_{rr} = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r}.$$

3. Псевдо-сферическая система координат (λ, φ, z; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\hat{e}_{\lambda\varphi} = \hat{e}_{\varphi\lambda} = \cos\varphi \frac{\partial}{r_0\partial\varphi} \left(\frac{\hat{u}_\lambda}{\cos\varphi} \right) + \frac{1}{r_0\cos\varphi} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial\lambda}; \quad \hat{e}_{\lambda z} = \hat{e}_{z\lambda} = \frac{\partial \hat{u}_\lambda}{\partial z} + \frac{1}{r_0\cos\varphi} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial\lambda};$$

$$\hat{e}_{\varphi z} = \hat{e}_{z\varphi} = \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial\varphi}; \tag{22}$$

$$\frac{1}{2} \hat{e}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{r_0\cos\varphi} \frac{\partial \hat{u}_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r_0} \mathrm{tg}\varphi; \quad \frac{1}{2} \hat{e}_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{r_0\partial\varphi}; \quad \frac{1}{2} \hat{e}_{zz} = \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z}.$$

2.7 *Оператор Лапласа*

Основываясь на выражении в прямоугольных декартовых координатах, назовем тензор $\Delta a = m^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta a$ оператором Лапласа от скалярной функции *a*. Имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3; h_1, h_2, h_3):

$$\Delta a = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial a}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial a}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial a}{\partial x^3}\right)\right\}. \tag{1}$$

2. Сферическая система координат (λ, φ, r ; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\Delta a = \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 a}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a}{\partial r}\right). \tag{2}$$

3. Псевдо-сферическая система координат (λ, φ, z ; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\Delta a = \frac{1}{r_0^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 a}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r_0}\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}. \tag{3}$$

2.8 *Дифференциальный оператор набла* ∇

По определению оператор ∇ равен (Корн, Корн, 1973; п.16.10–7; 6.4–2):

$$\nabla = \mathbf{e}^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\mathbf{e}^2\frac{\partial}{\partial x^3}+\mathbf{e}^3\frac{\partial}{\partial x^3}. \tag{1}$$

Компоненты ∇_j преобразуются как ковариантные компоненты вектора (см. Корн, Корн, 1973; п.16.1–2):

$$\overline{\nabla}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^k}\nabla_j. \tag{2}$$

Координаты x^1, x^2, x^3 и $\overline{x}^k = \overline{x}^k(x^1, x^2, x^3)$, $k = 1,2,3$ предполагаются ортогональными.

При помощи ∇ можно выразить оператор Лапласа для вектора $\mathbf{a}$:

$$\Delta\mathbf{a} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}). \tag{3}$$

Произведение ∇ и $(\nabla\cdot\mathbf{a})$ в (3) предполагается как внешнее (Корн, Корн, 1973; п.16.3–6).

В случае прямоугольных декартовых координат *x, y, z* формула (3) дает:

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{e}^1\Delta a_x + \mathbf{e}^2\Delta a_y + \mathbf{e}^3\Delta a_z, \tag{4}$$

где (a_x, a_y, a_z) – компоненты вектора **a** по осям *x, y, z*.

2.9 *Индивидуальная производная скаляра по времени*

Напомним, что в прямоугольных декартовых координатах *x, y, z* индивидуальная производная скалярной характеристики $a = a(x, y, z, t)$ (например, температуры *T*) по времени дается формулой:

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + u\frac{\partial a}{\partial x} + v\frac{\partial a}{\partial y} + w\frac{\partial a}{\partial z}, \tag{1}$$

где *u, v, w* – компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ по осям *x, y, z*. Основываясь на формуле (1), определим индивидуальную производную скалярной функции $a = a(x^1, x^2, x^3, t)$

по времени в произвольной ортогональной криволинейной системе координат как:

$$\frac{Da}{Dt}=\frac{\partial a}{\partial t}+u^{\alpha}\nabla_{\alpha}a\,. \qquad (2)$$

Используя определение физических компонент вектора скорости u^{α}, имеем:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3; h_1, h_2, h_3):

$$\frac{Da}{Dt}=\frac{\partial a}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_k}{h_k}\frac{\partial a}{\partial x^k}\,. \qquad (3а)$$

2. Сферическая система координат (λ, φ, r ; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\frac{Da}{Dt}=\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\hat{u}_{\lambda}}{r\cos\varphi}\frac{\partial a}{\partial\lambda}+\frac{\hat{u}_{\varphi}}{r}\frac{\partial a}{\partial\varphi}+\hat{u}_r\frac{\partial a}{\partial r}\,. \qquad (3б)$$

3. Псевдо-сферическая система координат (λ, φ, z ; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\frac{Da}{Dt}=\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\hat{u}_{\lambda}}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial a}{\partial\lambda}+\frac{\hat{u}_{\varphi}}{r_0}\frac{\partial a}{\partial\varphi}+\hat{u}_z\frac{\partial a}{\partial z}\,. \qquad (3в)$$

2.10 *Индивидуальная производная вектора по времени*

Напомним, что в прямоугольных декартовых координатах *x, y, z* индивидуальная производная вектора $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ по времени дается следующей векторной формулой:

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+u\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}+v\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}+w\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\,. \qquad (1)$$

где (*u, v, w*) – компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ по осям *x, y, z*. Под адвективной компонентой производной вектора $\mathbf{a}$ по времени будем подразумевать вектор $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}=u\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}+v\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}+w\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\,. \qquad (2)$$

Основываясь на формулах (1) и (2) в произвольной ортогональной криволинейной системе координат, имеем:

$$\frac{Da^{\alpha}}{Dt}=\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial t}+u^{\beta}\nabla_{\beta}a^{\alpha}\,, \qquad (3)$$

$$b^r = u^s\nabla_s a^r\,. \qquad (4)$$

В силу (4) имеем:

$$b^r = u^s\left(\frac{\partial a^r}{\partial x^s}+\Gamma^r_{\gamma s}a^{\gamma}\right)=u^1\frac{\partial a^r}{\partial x^1}+u^2\frac{\partial a^r}{\partial x^2}+u^3\frac{\partial a^r}{\partial x^3}+$$

$$+\left(u^1\Gamma^r_{11}+u^2\Gamma^r_{12}+u^3\Gamma^r_{13}\right)a^1+\left(u^1\Gamma^r_{21}+u^2\Gamma^r_{22}+u^3\Gamma^r_{23}\right)a^2+\left(u^1\Gamma^r_{31}+u^2\Gamma^r_{32}+u^3\Gamma^r_{33}\right)a^3\,. \qquad (5)$$

Мы стремимся получить выражение для вектора b^r через физические компоненты векторов u^{α} и a^{α}. Пусть $r = 1$ и введем h_1 под знак производной. Получим:

$$u^1 \frac{\partial a^1}{\partial x^1} = u^1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1 a^1}{\partial x^1} - u^1 \frac{a^1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1}, \tag{6а}$$

$$u^2 \frac{\partial a^1}{\partial x^2} = u^2 \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1 a^1}{\partial x^2} - u^2 \frac{a^1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}, \tag{6б}$$

$$u^3 \frac{\partial a^1}{\partial x^3} = u^3 \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1 a^1}{\partial x^3} - u^3 \frac{a^1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}. \tag{6в}$$

Вспоминая определение физических компонент векторов u^α и a^α и учитывая формулы для символов Кристоффеля (1.9; (1) и (2)):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^2},\ \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^3},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1},\ \Gamma^1_{23} = 0,\ \Gamma^1_{33} = -\frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_3}{\partial x^1}$$

в произвольной ортогональной криволинейной системе координат имеем, используя (6):

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{u}_1}{h_1}\frac{\partial \hat{a}_1}{\partial x^1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2}\frac{\partial \hat{a}_1}{\partial x^2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3}\frac{\partial \hat{a}_1}{\partial x^3} - \frac{\hat{u}_2\hat{a}_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{\hat{u}_3\hat{a}_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{\hat{u}_1\hat{a}_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{\hat{u}_1\hat{a}_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}. \tag{7}$$

Повторяя вывод (7) для $r = 2$ и $r = 3$, получим:

$$\hat{b}_2 = \frac{\hat{u}_1}{h_1}\frac{\partial \hat{a}_2}{\partial x^1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2}\frac{\partial \hat{a}_2}{\partial x^2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3}\frac{\partial \hat{a}_2}{\partial x^3} - \frac{\hat{u}_1\hat{a}_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{\hat{u}_3\hat{a}_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^2} + \frac{\hat{u}_2\hat{a}_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1} + \frac{\hat{u}_2\hat{a}_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x^3}, \tag{8}$$

$$\hat{b}_3 = \frac{\hat{u}_1}{h_1}\frac{\partial \hat{a}_3}{\partial x^1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2}\frac{\partial \hat{a}_3}{\partial x^2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3}\frac{\partial \hat{a}_3}{\partial x^3} - \frac{\hat{u}_1\hat{a}_1}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^3} - \frac{\hat{u}_2\hat{a}_2}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{\hat{u}_3\hat{a}_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{\hat{u}_3\hat{a}_2}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Эти три формулы можно объединить в одну:

$$\hat{b}_r = \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_k}{h_k}\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_k\hat{a}_k}{h_rh_k}\frac{\partial h_k}{\partial x^r} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_r\hat{a}_k}{h_rh_k}\frac{\partial h_r}{\partial x^k}. \tag{10}$$

Отметим, что в этом выражении, так же как и в формуле (11) в этом разделе, не производится суммирование по повторяющимся индексам. Формула (10) дает выражение для вектора $\hat{b}_r$ в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Индивидуальная производная физических компонент вектора $\mathbf{a}(x^1, x^2, x^3, t)$ по времени дается следующими формулами:

1. Произвольная ортогональная криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3; h_1, h_2, h_3):

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_i = \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_k}{h_k}\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_k\hat{a}_k}{h_kh_i}\frac{\partial h_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{u}_i\hat{a}_k}{h_kh_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^k}. \tag{11}$$

2. Сферическая система координат (λ, φ, r; $h_1 = r\cos(\varphi)$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_\lambda = \frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial t} + \frac{\hat{u}_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r}\frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial \varphi} + \hat{u}_r\frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial r} - \frac{\hat{u}_\lambda\hat{a}_\varphi}{r}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\hat{u}_\lambda\hat{a}_r}{r}, \tag{12а}$$

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial t} + \frac{\hat{u}_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r}\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \hat{u}_r\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\lambda \hat{a}_\lambda}{r}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\hat{u}_\varphi \hat{a}_r}{r}. \quad (12б)$$

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_r = \frac{\partial \hat{a}_r}{\partial t} + \frac{\hat{u}_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \lambda} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r}\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \varphi} + \hat{u}_r\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial r} - \frac{\hat{u}_\lambda \hat{a}_\lambda + \hat{u}_\varphi \hat{a}_\varphi}{r}. \quad (12в)$$

3. Псевдо-сферическая система координат (λ, φ, r; $h_1 = r_0\cos(\varphi)$, $h_2 = r_0$, $h_3 = 1$):

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_\lambda = \frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial t} + \frac{\hat{u}_\lambda}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r_0}\frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial \hat{a}_\lambda}{\partial z} - \frac{\hat{u}_\lambda \hat{a}_\varphi}{r_0}\operatorname{tg}\varphi, \quad (13а)$$

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_\varphi = \frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial t} + \frac{\hat{u}_\lambda}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r_0}\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial z} + \frac{\hat{u}_\lambda \hat{a}_\lambda}{r_0}\operatorname{tg}\varphi, \quad (13б)$$

$$\left(\widehat{\frac{D\mathbf{a}}{Dt}}\right)_z = \frac{\partial \hat{a}_z}{\partial t} + \frac{\hat{u}_\lambda}{r_0\cos\varphi}\frac{\partial \hat{a}_z}{\partial \lambda} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r_0}\frac{\partial \hat{a}_z}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial \hat{a}_z}{\partial z}. \quad (13в)$$

3. Заключение

Работа посвящена анализу тензорных соотношений в различных системах ортогональных криволинейных координат. Рассмотрение таких формул позволяет выявить основные особенности ряда приближенных координатных систем, широко применяемых при анализе динамических процессов в океане. В работе даны определения в общей тензорной форме следующих операторов:

1. Скалярного и векторного произведений, а также смешанного произведения трех векторов;
2. Дивергенции вектора и симметрического тензора второго ранга;
3. Градиента скалярной функции;
4. Индивидуальной производной скаляра и вектора по времени;
5. Оператора Лапласа и оператора набла.

Найдены формулы для физических компонент рассматриваемых тензоров в произвольной ортогональной криволинейной системе координат, выраженные через масштабные множители (коэффициенты Ламе). Эти формулы широко используются для записи уравнений движения в региональных численных моделях океанских течений, применяющих ортогональные криволинейные системы координат. Уравнения движения, записанные в приближенных системах координат, например, в псевдо-сферической системе координат, используются в глобальных моделях океанских течений. Приведенные соотношения важны для аналитического и численного рассмотрения динамических процессов, упрощают анализ энергетического и других динамических балансов в океане.

Литература

Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1973, 240 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Перевод с английского. М.: Издательство «Наука», Главная редакция физ.-мат. Литературы, 1973. 832 с.

Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд. АН СССР, 1951. 426 с.

Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть1, Глава Первая, параграфы 1–5. М.: Гос. Изд. Физ. Мат. Литературы, 1963.

Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for scientists and engineers. Definitions, theorems, and formulas for reference and review / Second, enlarged and revised edition. McGraw – Hill Book Company, 1968.

McConnell A.J. Appllications of tensor analysis. Dover Publications, 1957. 317 p.

Mueller P. The equations of oceanic motions. Cambridge University Press, 2006. 291 p.

Phillips N.A. The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the «traditional approximation» // J. Atmos. Sci. 1966. Vol. 23. No. 5. P. 626–628.

Phillips N.A. Reply // J. Atmos. Sci., 1968, Vol. 25. No. 6. P. 1155–1157.

Veronis G. Comments on Phillips proposed simplifications of the equations for a shallow rotating atmosphere // J. Atmos. Sci. 1968. Vol. 25. P. 1154–1155.

TENSOR ANALYSIS OF MAIN DIFFERENTIAL OPERATORS UTILIZED FOR DESCRIPTION OF OCEAN HYDRODYNAMICS IN CURVILINEAR ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEM

Kamenkovich V.M., Nechaev D.A.

University of Southern Mississippi, Hattiesburg, MS 39406, USA
e-mail: Dmitri.Nechaev@usm.edu
Submitted 15.04.2019, accepted 30.05.2019

The paper presents an analysis of tensor expressions in different curvilinear orthogonal coordinate systems. The analysis reveals specific properties of a number of approximated coordinate systems widely used in the studies of ocean dynamics. The paper consists of two parts. The part 1 presents a brief overview of the key definitions and important relations of tensor analysis which are utilized in part 2 of the paper. The part 2 considers invariant representation of different types of vector products, divergence of vector field and divergence of symmetric tensor of rank 2, gradient of a scalar filed, curl of a vector filed. The part 2 also discusses specific properties of the rate-of-strain tensor, general form of the Laplace operator, properties of operator nabla, and general forms of material derivative for scalar and vector fields. The equations for the properties under consideration are derived for the physical components of the corresponding tensors.

Keywords: tensor analysis, covariant derivative, Kronecker, Christoffel, Levi-Civita symbols, curl of vector field, rate-of-strain tensor

References

Kamenkovich V.M. Osnovy dinamiki okeana (Basics of ocean dynamics). Gidrometeoizdat, 1973, 240 p.

Kochin N.E. Vektornoye ischisleniye i nachala tenzornogo ischisleniya (Vector calculations and beginning of tensor calculations). Moscow: *Izd. AN SSSR*, 1951, 426 p.

Kochin N.E., Kibel I.A., and Rose N.V. Teoreticheskaya gidromehanika (Theoretical Hydromechanics). Moscow: *Gos. Izd. Fiz. Mat Literatury*, 1963.

Korn G. and Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i ingenerov. Opredeleniya, teoremy, formuly (Handbook on mathematics for scientisrs and engineers. Determinations,theorems, formules). Moscow: *Izd. Nauka*, 1973, 832 p.

Korn G.A. and Korn T.M. Mathematical Handbook for scientists and engineers. Definitions, theorems, and formulas for reference and review. Second, enlarged and revised edition, McGraw – Hill Book Company, 1968.

McConnell A.J. Appllications of tensor analysis. Dover Publications, 1957, 317 p.

Mueller P. The equations of oceanic motions. Cambridge University Press, 2006, 291 p.

Phillips N.A. The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the «traditional approximation». *J. Atmos. Sci*., 1966, Vol. 23, No. 5, pp. 626–628.

Phillips N.A. Reply. J. Atmos. Sci., 1968, Vol. 25, No. 6, pp. 1155–1157.

Veronis G. Comments on Phillips proposed simplifications of the equations for a shallow rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci*., 1968, Vol. 25, 1154–1155.