

## ОСОБЕННОСТИ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫХ ТРЕХВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ВОЛНАХ НА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ГЛУБИНЕ

**Штремель М.Н.**

*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Москва,  
Нахимовский проспект, д. 36, e-mail: [shtremel@ocean.ru](mailto:shtremel@ocean.ru)*

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

При распространении волн на промежуточной глубине (диапазон относительных глубин –  $0.022 < h/L < 0.37$ , согласно работе (Young, Eldeberky, 1998)) реализуются трехволновые околорезонансные взаимодействия, где полный резонанс наблюдается либо по волновым числам, либо по частотам, а по другому параметру – расстройка (отклонение от полного резонанса (1), (2)).

$$k_1 + k_2 - k_3 = \delta_k \quad (1)$$

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \delta_\omega \quad (2)$$

Околорезонансные трехволновые взаимодействия приводят к периодическому росту и затуханию высших гармоник за счет энергии основной гармоники на пространственном периоде порядка длины волны. Длина периода обмена энергией между гармониками обратно пропорциональна величине отклонения от полного резонанса:  $L_b = 2\pi/\delta_\gamma$ , где  $\delta_\gamma$  – отклонение от полного резонанса по волновому числу или по частоте. По какому параметру – по волновому числу или по частоте – происходит расстройка, остается невыясненным. В книге «Введение в механику сплошных сред» (Бреховских, Гончаров, 1982) указывается наличие расстройки по частотам, в работе (Madsen, Sørensen, 1993) – по волновым числам.

Вышеописанный процесс приводит к изменению симметрии волн, что, в свою очередь, вызывает возникновение градиентов волновой компоненты поперечного транспорта наносов и переформирование подводного профиля дна под действием волнения. Таким образом, знание особенностей околорезонансных трехволновых взаимодействий необходимо для понимания морфодинамических процессов, протекающих в береговой зоне водоемов.

Цель исследования – определить, по волновым числам или по частотам существует расстройка, а также определить возможность предсказания пространственной периодичности обмена энергией между гармониками.

Для достижения цели использовались данные следующих экспериментов.

Полевой эксперимент «Шкорпиловци-2007». В ходе эксперимента возвышения свободной поверхности измерялись 15 емкостными волнографами, установленными на расположенной перпендикулярно берегу исследовательской эстакаде. Длина эстакады – 220 м, глубина на ее конце – 4.5 м.

Лабораторный эксперимент «Сочи–2016». Эксперимент по исследованию трансформации псевдомонохроматических волн проводился над плоским дном (длина плоского участка – 11 м). Возвышение свободной поверхности фиксировалось 18 струнными емкостными волнографами с частотой опроса 20 Гц. Длина серий измерений – 5 мин. Диапазон волновых параметров: периоды 1.4–2.1 с, высоты 6–17 см, глубины 31–60 см.

Численный эксперимент с помощью гидродинамической негидростатической фазоразрешающей модели SWASH. Монохроматические волны распространялись над плоским дном, диапазон глубин – от 2 до 7 м, периодов – от 6 до 9 с, высота волн – 1 м, длина моделируемой области – 250 м, вывод данных осуществлялся в 50 точках (с шагом 5 м).

### Результаты

*По волновым числам или по частотам существует расстройка*

Во втором приближении профиль волн может быть представлен в виде суммы двух гармоник:

$$\eta = a_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi) \quad (3)$$

Построив график этой суммы для условия наличия расстройки по частотам и полного резонанса по волновым числам и наоборот, увидим, что при наличии расстройки по волновым числам, профиль волны будет постоянен во времени и изменчив по пространству, а в случае наличия расстройки по волновому числу – будет менять свою форму во времени и оставаться практически одинаковым в различных точках пространства (рис. 1).

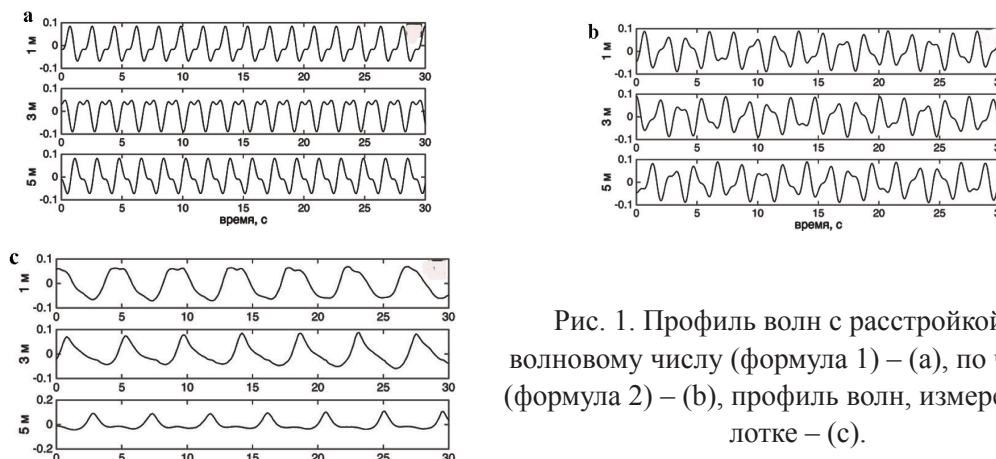


Рис. 1. Профиль волн с расстройкой по волновому числу (формула 1) – (а), по частоте (формула 2) – (b), профиль волн, измеренных в лотке – (с).

Сравнив реальный профиль трансформирующейся над плоским дном монохроматической волны (лабораторный эксперимент «Сочи–2016») с двумя вышеописанными случаями, увидим, что он соответствует ситуации с наличием расстройки по волновому числу.

Построим спектр нерегулярных волн, наблюдавшихся в ходе полевого эксперимента «Шкорпиловци–2007» (рис. 2). Частота пика второй гармоники равна удвоенной частоте пика спектра ( $f_1 = 0.1325, f_2 = 0.265$ ). В случае, если бы существо-

вала расстройка по частоте, максимум энергии второй гармоники располагался бы на частоте  $f_2 = 0.2374$ , чего в реальности не наблюдается.

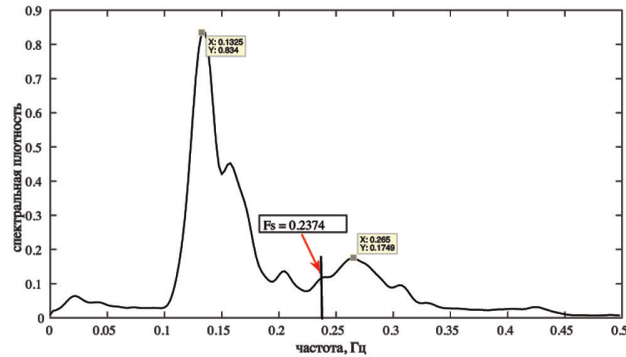


Рис. 2. Спектр волн, измеренный в ходе эксперимента «Шкорпиловци-2007», расстояние от берега – 123 м, глубина – 3.8 м, значимая высота волны – 1.7 м, период пика спектра – 7.5 с.

Из всего вышесказанного делается вывод, что расстройка существует по волновым числам, а по частотам – полный резонанс.

*Возможность предсказания пространственной периодичности обмена энергией между гармониками*

По данным лабораторного и численного экспериментов были определены длины периодов обмена энергией между гармониками и нанесены на график, в зависимости от относительной глубины. Также построены кривые, соответствующие расчетным значениям длин этих периодов для расстроек, определявшихся по дисперсионному соотношению линейной теории волн и нелинейному дисперсионному соотношению (Kirby, Dalrymple, 1986).

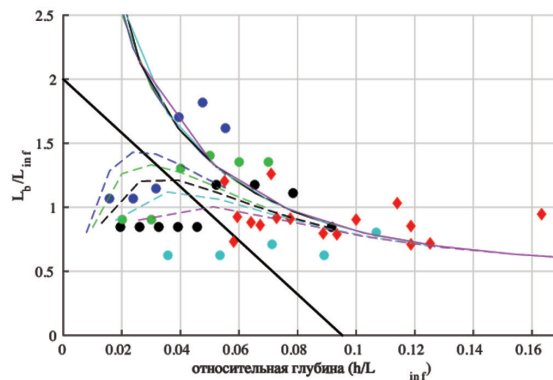


Рис. 3. Зависимость периода обмена энергией между гармониками от относительной глубины. Сплошные линии – периоды, рассчитанные исходя из дисперсионного соотношения линейной теории, пунктир – из нелинейного дисперсионного соотношения, круги – результаты численного эксперимента, ромбики – лабораторного. Цветом кругов и линий показан период: сиреневый – 5с, голубой – 6с, черный – 7с, зеленый – 8с, синий – 9с.

На графике (рис. 3) можно четко разделить два случая: периодичность обмена на мелкой воде слабо зависит от глубины и может быть предсказана по формуле  $L_b/L_\infty = L_{bnl}$ , где  $L_\infty$  – длина волны на глубокой воде,  $L_{bnl}$  – длина периода обмена энергией, рассчитанная исходя из нелинейного дисперсионного соотношения. На промежуточной глубине период обмена может быть предсказан исходя из дисперсионного соотношения линейной теории.

Эти случаи могут быть разделены линией  $L_b/L_\infty = 21h/L_\infty + 2$  (красная сплошная линия на рис. 3 или грубо – по пороговому значению относительной глубины  $h/L = 0.05$ ).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-05-00741 и № 18-55-45026.

**Ключевые слова:** волны на воде, промежуточная глубина, трехволновые околорезонансные взаимодействия, нелинейная трансформация волн, периодический обмен энергией, расстройка

### Литература

- Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М: Наука, 1982. 337 с.
- Kirby J.T., Dalrymple R.A.* An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models // J. Coastal Eng. 1986. No. 9. P. 545–561.
- Young I.R., Eldeberky Y.* Observations of triad coupling of finite depth wind waves // Coastal Engineering. 1998. No. 33. P. 137–154.
- Madsen P.A., Sorensen O.R.* Bound waves and triad interactions in shallow water // J. Ocean Eng. 1993. No. 20(4). P. 359–388.

## FEATURES OF NEAR-RESONANT TRIAD INTERACTIONS IN WAVES ON INTERMEDIATE DEPTH

**Shtremel M.N.**

*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,  
36 Nahimovskiy prospekt, Moscow, 117997, Russia, e-mail: [shtremel@ocean.ru](mailto:shtremel@ocean.ru)  
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019*

When propagating on the intermediate depth (relative depths  $(h/L)$  vary from 0.022 to 0.37, according research of (Young, Eldeberky, 1998) waves transform due to near-resonant triad interactions, where full resonance occurs either for triads of wave-numbers or frequencies. For the other wave parameter mismatch will occur (1), (2).

$$k_1 + k_2 - k_3 = \delta_k \quad (1)$$

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \delta_\omega \quad (2)$$

Near-resonant triad interactions lead to periodic exchange of energy between first and higher harmonics (recurrence) on spatial scale about the wave length. Length of the

period of recurrence (beat length) is proportional to the mismatch value ( $L_b = 2\pi/\delta_\gamma$ , where  $\delta_\gamma$  – frequency or wavenumber mismatch). There is still no common opinion, whether there is wavenumber or frequency mismatch in waves in coastal zone. In (Brehovskih, Goncharov, 1982) book frequency mismatch is indicated, in papers by Madsen and Sorensen (for example, Madsen, Sorensen, 1993) – wavenumber mismatch.

Periodic exchange of energy between first and higher harmonics causes changes on wave symmetry, which in turn leads to appearance of wave-induced cross-shore sediment transport gradients and changes in coastal profile. Thus, it is important to know features of nonlinear wave transformation in coastal zone to study coastal morphodynamics.

The main goal of the study is to determine whether there is wavenumber or frequency mismatch and is it possible to predict beat length.

To achieve the goal, data of field, laboratory and numerical experiment were used.

During field experiment “Shkorpilovtsy-2007” 15 wave gauges were installed along the special research pier. The pier 200 m length and is located perpendicular to the coastline. The depth on the seaward edge of the pier is 4.5 m.

Laboratory experiment “Sochi-2016” was dedicated to studying of pseudomonochromatic waves above constant depth in wave flume. Length of the flat part of the flume is 11 m, free surface elevation is registered by 18 capacity wire gauges. Series with wave periods from 1.4 to 2.1 s, wave heights from 6 to 17 cm and depths from 31 to 60 cm were tested.

Numerical experiment was conducted using non-hydrostatic phase-resolving hydrodynamic model SWASH. Monochromatic waves were propagating above constant depth from 2 to 7 m, wave periods varied from 6 to 9 seconds, wave height – 1 m, length of modelling area – 250 m. There were 50 output points along the modelled area with 5 m spatial step.

## Results

### *Is there frequency or wavenumber mismatch?*

a) In second order approximation wave profile can be represented as sum of two sinusoids

$$\eta = a_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi) \quad (3)$$

If wavenumber mismatch occurs, then wave profile looks as shown on fig. 1a: its form is stable in time and changes in space. If there is frequency mismatch, then wave profile changes its shape in time (fig. 1b). Fig. 1c shows spatial evolution of profile of pseudomonochromatic wave measured during laboratory experiment. Its profile changes similarly to situation on fig. a, where frequency mismatch exists.

b) On fig. 2 spectrum of irregular waves measured during field experiment is shown. Second harmonic maximum frequency equals frequency of the main peak doubled ( $f_1 = 0.1325, f_2 = 0.265, f_2 = 2f_1$ ). If there was frequency mismatch in irregular waves, position of second harmonic would be shifted to 0.2374 Hz.

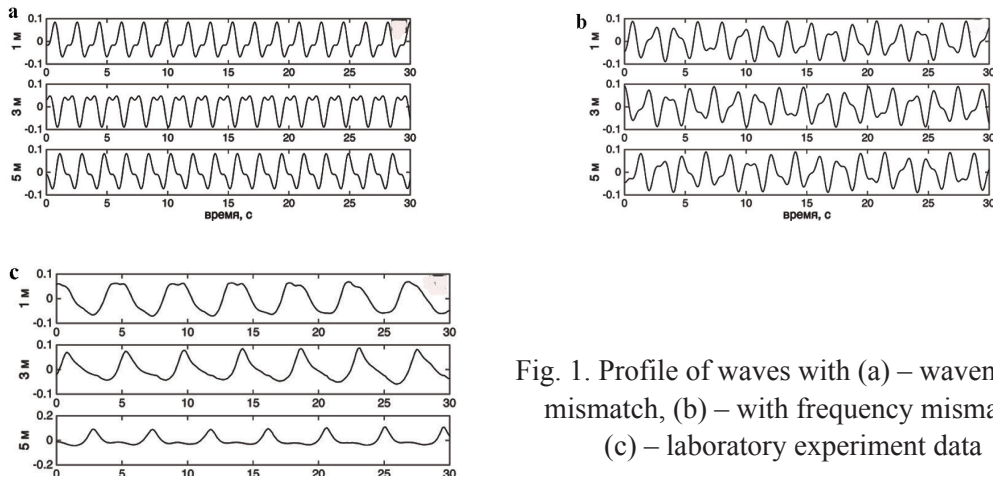


Fig. 1. Profile of waves with (a) – wavenumber mismatch, (b) – with frequency mismatch, (c) – laboratory experiment data

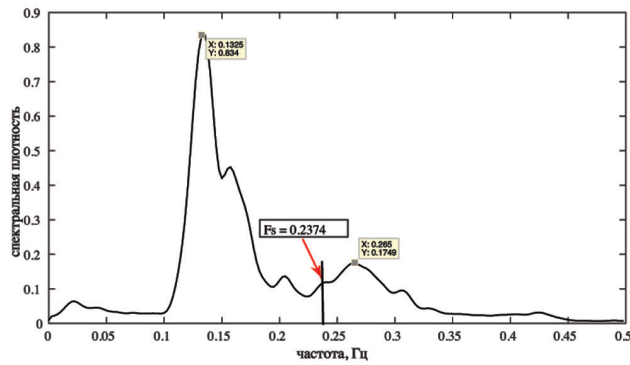


Fig. 2. Sea waves spectrum, “Shkorpilovtsi-2007” field experiment. Distance from the shoreline – 123 m, depth – 3.8 m, significant wave height – 1.7 m, peak period – 7.5 s.

So, we can conclude that there is full resonance in frequencies and mismatch in wavenumbers for waves transforming on intermediate depth.

*Possibility of beat length prediction*

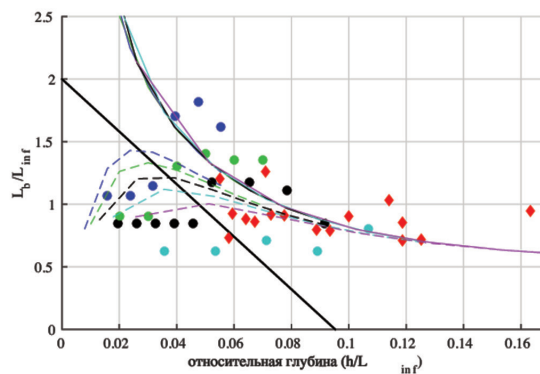


Fig. 3. Dependence of beat length on relative depth. Solid lines – calculated from linear theory dispersion relation, dashed lines – from nonlinear dispersion relation, circles – numerical modelling, diamonds – laboratory modelling.

Based on laboratory modelling and numerical simulation data beat length values were obtained and plotted together with lines, representing beat length assessments with linear and nonlinear (Kirby, Dalrymple, 1986) wave theories dispersion relations.

Two cases are distinguished on fig. 3: on shallow water beat lengths do not depend on relative depth and can be predicted using following formula  $L_b = L_{bnl} - 0.35 L_\infty$ , where  $L_\infty$  – deep water wave length,  $L_{bnl}$  – beat length, predicted with nonlinear dispersion relation. On intermediate depth beat length can be predicted from linear dispersion relation. These two cases are divided by the relation  $L_b/L_\infty = 21h/L_\infty + 2$  or roughly by critical value of relative depth  $h/L = 0.05$ .

The research was supported by the RFBR grant No. 18-05-00741 and No. 18-55-45026

**Keywords:** water waves, intermediate depth, nonlinear triad interactions, nonlinear wave transformation, beat length, recurrence, mismatch

### References

- Brehovskih L.M. and Goncharov V.V.* Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred (The Introduction to the Continuous Media Mechanics), Moscow: Nauka, 1982, 335 p.
- Kirby, J.T. and Dalrymple R.A.* An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models. *J. Coastal Eng.*, 1986, No. 9, pp. 545–561.
- Young I.R., Eldeberky Y.* Observations of triad coupling of finite depth wind waves. *Coastal Engineering*, 1998, No. 33, pp. 137–154.
- Madsen P.A., Sorensen O.R.* Bound waves and triad interactions in shallow water. *J. Ocean Eng.*, 1993, No. 20(4), pp. 359–388.