УДК 517.9 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).38

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПАРЫ ЛАКСА И ОПЕРАТОРА РЕКУРСИИ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, ул. Чернышевского, 112, 450008, Россия, e-mail: habibullinismagil@gmail.com
e-mail: aigulya.khakimova@mail.ru
Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

В литературе широко известен метод построения частных решений нелинейных уравнений в частных производных, основанный на понятии дифференциальной связи (или инвариантного многообразия) (Яненко, 1961; Сидоров и др., 1984). Идея метода состоит в том, что к заданному уравнению добавляется совместное с ним уравнение, как правило, более простое. Такой прием позволяет найти частные решения исследуемого уравнения. В работах (Павлова и др., 2017; Хабибуллин и др., 2017, 2018; Хакимова, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018) была предложена схема построения пар Лакса и рекурсионных операторов для интегрируемых уравнений в частных производных, основанная на использовании аналогичной идеи. Подходящее обобщение состоит в том, что мы накладываем дифференциальную связь не к самому уравнению, а к его линеаризации. Полученное в итоге уравнение мы называем обобщенным инвариантным многообразием. В работах (Павлова и др., 2017; Хабибуллин и др., 2017, 2018; Хакимова, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018) показано, что обобщенные инвариантные многообразия позволяют эффективно строить пары Лакса и операторы рекурсии интегрируемых уравнений.

Поясним суть алгоритма, для определенности возьмем класс уравнений вида:

$$u_t = f(u,u_1,u_2,\ldots,u_k), \tag{1}$$

где $u_j = D_x^j u$. Здесь через D_x обозначен оператор полного дифференцирования по x. Мы рассматриваем поверхность, определенную обыкновенным дифференциальным уравнением следующего вида:

$$H(U,U_1,\ldots,U_m;u,u_1,\ldots,u_{m_1}) = 0, \tag{2}$$

совместным с линеаризацией уравнения (1):

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_1}D_x + \frac{\partial f}{\partial u_2}D_x^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_k}D_x^k\right)U \tag{3}$$

для всех значений динамических переменных уравнения (1): $u,u_1,u_2,\ldots$. Сконцентрируемся на следующих важных случаях:

1. H определяется линейным уравнением вида:

$$H = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(u, u_1, \ldots) U_j;$$

2. H определяется нелинейным уравнением вида (2). Предположим для простоты, что

$$H = \sum_{i,j=0}^{k-1} \alpha_{i,j}(u, u_1, \ldots) U_i U_j + \alpha_k(u, u_1, \ldots).$$

В первом случае функцию H можно подобрать так, что уравнение (2) приводится к виду $RU = \lambda U$, где R – оператор рекурсии для уравнения (1) (Павлова и др., 2017; Хабибуллин и др., 2017, 2018; Хакимова, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018). Во втором случае пара уравнений (2)–(3) представляет собой нелинейную пару Лакса для уравнения (1). В рассмотренных нами примерах существует точечная замена переменных, задаваемая в виде квадратичных форм, сводящая эту нелинейную пару к линейной (Павлова и др., 2017; Хабибуллин и др., 2017, 2018; Хакимова, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018). Эффективность алгоритма подтверждена многочисленными примерами.

Исследования выполнены при поддержке Программы фундаментальных исследований президиума РАН «Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения».

Ключевые слова: интегрируемое уравнение, инвариантное многообразие, линеаризация, пара Лакса, оператор рекурсии.

Литература

Павлова Е.В., Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Об одной интегрируемой дискретной системе // Дифференциальные уравнения. Математическая физика, Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., М.: ВИНИТИ РАН, 2017. Т. 140. С. 30–42.

Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике // Новосибирск: Наука, 1984.

Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек // Теоретическая и математическая физика. 2017. Т. 191. № 3. С. 369–388.

Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. О прямом алгоритме построения рекурсионных операторов и пар Лакса для интегрируемых моделей // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 196. № 2. С. 294–312.

Хакимова А.Р. К задаче описания обобщенных инвариантных многообразий нелинейных уравнений // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. № 3. С. 110–120.

Яненко Н.Н. Об инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1961. Т. 3. *С.* 185–194.

Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M.N. On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2016. Vol. 49. No. 3. 35 p. id 035202.

Habibullin I.T., Khakimova A.R. On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. Vol. 50. No. 30. 19 p. id 305206.
Habibullin I.T., Khakimova A.R. On the recursion operators for integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2018. Vol. 51. No. 42. 22 p. id 305206.

ALGORITHM FOR CONSTRUCTING A LAX PAIR AND A RECURSION OPERATOR FOR INTEGRABLE EQUATIONS

Habibullin I.T., Khakimova A.R.

Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre,
Russian Academy of Science, Ufa, 450008, Russia,
e-mail: *habibullinismagil@gmail.com,* *e-mail:* *aigulya.khakimova@mail.ru*
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

The method of constructing particular solutions to nonlinear partial differential equations based on the notion of differential constraint (or invariant manifold) is well known in the literature, see (Yanenko, 1961; Sidorov et al., 1984). The matter of the method is to add a compatible equation to a given equation and as a rule, the compatible equation is simpler. Such technique allows one to find particular solutions to a studied equation. In works (Pavlova et al., 2017; Habibullin et al., 2017, 2018; Khakimova, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018) there was proposed a scheme for constructing the Lax pairs and recursion operators for integrable partial differential equations based on the use of similar idea. A suitable generalization is to impose a differential constraint not on the equation, but on its linearization. The resulting equation is referred to as a generalized invariant manifold. In works (Pavlova et al., 2017; Habibullin et al., 2017, 2018; Khakimova, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018) it is shown that generalized invariant varieties allow efficient construction of Lax pairs and recursion operators of integrable equations.

Let us explain the essence of the algorithm, for the certainty take the class of the equations of the form:

$$u_t = f(u, u_1, u_2, \ldots, u_k), \tag{1}$$

where $u_j = D_x^j u$. Here D_x stands for the operator of the total differentiation with respect to x. We consider the surface defined by an ordinary differential equation of the following form:

$$H(U, U_1, \ldots, U_m; u, u_1, \ldots, u_{m_1}) = 0. \tag{2}$$

We assume that (2) is consistent with the linearization of (1):

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_1} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_2} D_x^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k \right) U \tag{3}$$

for all values of the dynamical variables of the equation (1): $u, u_1, u_2, \ldots$. We concentrate on the following important cases:

1. H is a linear form

$$H = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(u, u_1, \ldots) U_j;$$

2. H is determined by a nonlinear equation of the form (2). Suppose for simplicity that

$$H = \sum_{i,j=0}^{k-1} \alpha_{i,j}(u, u_1, \ldots) U_i U_j + \alpha_k(u, u_1, \ldots).$$

In the first case, the function H can be chosen so that equation (2) is reduced to the form $RU = \lambda U$, where R is the recursion operator for the equation (1) (Pavlova et al., 2017; Habibullin et al., 2017, 2018; Khakimova, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018). In the second case a couple of the equations (2)–(3) constitutes a nonlinear Lax pair for (1). In the examples we have considered, there is a point-wise change of variables, given in the form of quadratic forms, which reduces this nonlinear pair to a linear one (Pavlova et al., 2017, Habibullin et al., 2017, 2018; Khakimova, 2018; Habibullin et al., 2016, 2017, 2018). Efficiency of the algorithm is approved by numerous examples.

The research was supported by the RAS Presidium Program «Nonlinear dynamics: fundamental problems and applications».

Keywords: integrable equation, invariant manifold, linearization, Lax pair, recursion operator.

References

Pavlova E.V., Habibullin I.T., and Khakimova A.R. On one integrable discrete system. Differential Equations. Mathematical Physics. Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovrem. *Mat., Pril. Temat. Obz.,* 2017, Vol. 140, pp. 30–42.

Sidorov A.F., Shapeev V.P., and Yanenko N.N. The method of differential constraints and its applications in gas dynamics. Novosibirsk: Nauka, 1984.

Habibullin I.T. and Khakimova A.R. Invariant manifolds and Lax pairs for integrable nonlinear chains. *Theor. Math. Phys.,* 2017, Vol. 191, No. 3, pp. 369–388.

Habibullin I.T. and Khakimova A.R. On a direct algorithm for constructing recursion operators and Lax pairs for integrable models. *Theor. Math. Phys.,* 2018, Vol. 196, No. 2, pp. 294–312.

Khakimova A.R. On description of generalized invariant manifolds for nonlinear equations. *Ufa Math. J.,* 2018, Vol. 10, No. 3, pp. 110–120.

Yanenko N.N. On invariant differential constraints for hyperbolic systems of quasilinear equations. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zav. Ser. Matem.,* 1961, Vol. 3, pp. 185–194.

Habibullin I.T., Khakimova A.R., and Poptsova M.N. On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* 2016, Vol. 49, No. 3, 35 p., id 035202.

Habibullin I.T. and Khakimova A.R. On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, Vol. 50, No. 30, 19 p., id 305206.

Habibullin I.T. and Khakimova A.R. On the recursion operators for integrable equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2018, Vol. 51, No. 42, 22 p., id 305206.