© Стрижова Н.А., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 118–122

УДК 514.8+517.9 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).37

О ГАМИЛЬТОНОВОЙ РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ В СЛУЧАЕ ЧЕТЫРЕХ ПРИМАРНЫХ ПОЛЕЙ

Стрижова Н.А.

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
проспект Академика Семенова, д. 1-А, г. Черноголовка, Московская обл., Россия
e-mail: nanapavl@gmail.com

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

Уравнения ассоциативности возникли в работах Виттена (Witten, 1990), Дейкхрафа, Верлинде, (Dijkgraaf et al., 1991) по двумерным топологическим теориям поля и впоследствии стали играть ключевую роль во многих других важных областях математики и математической физики: в квантовых когомологиях, теории инвариантов Громова-Виттена, исчислительной геометрии, теории подмногообразий и т.д. В работах Мохова (Мохов, 1984, Мохов, 1987) был предложен и доказан общий фундаментальный принцип, утверждающий каноническую гамильтоновость ограничения произвольного потока на множество стационарных точек его невырожденного интеграла. В данной работе в явном виде найдены гамильтонианы редукции уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей согласно конструкции Мохова.

Введем уравнения ассоциативности, следуя (Dubrovin, 1994). Пусть $F(t^1, t^2,\dots, t^n)$ – функция n переменных такая, что выполнены условия ($\partial^3 F/\partial t^i\partial t^j\partial t^k = F_{ijk}$): (i) матрица $\eta_{ij} = F_{1ij}$, $i, j = 1,\dots, n,$ постоянна и невырожденна, (ii) функции $c^k_{ij}(t) = \eta^{ks}F_{sij}$, $i, j, k = 1,\dots, n,$ при любых $t = (t^1,\dots, t^n)$ задают структуру ассоциативной алгебры с базисом $e_1,\dots, e_n$ и умножением $e_i \circ e_j = c^k_{ij}(t)e_k$. Системой Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде или уравнениями ассоциативности называется система уравнений в третьих частных производных на функцию $F(t^1,\dots, t^n)$, эквивалентная условию ассоциативности в этой алгебре:

$$\eta^{pq}F_{pij}F_{qkl} = \eta^{pq}F_{pil}F_{qjk}. \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу $\eta_{ij} = \delta_{i+j,5}$, $i, j =1,\dots, 4,$ в случае четырех примарных полей ($n = 4$). Ей соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3, t^4)=(t^1)^2t^4/2+t^1t^2t^3+f(t^2, t^3, t^4)$ и уравнения ассоциативности ($x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$)

$$-2f_{xyz} - f_{xyy}f_{xxy} + f_{yyy}f_{xxx} = 0, \qquad -f_{xzz} - f_{xyy}f_{xxz} + f_{yyz}f_{xxx} = 0, \tag{2}$$

$$-2f_{xyz}f_{xxz} + f_{xzz}f_{xxy} + f_{yzz}f_{xxx} = 0, \qquad f_{zzz} - f_{xyz}{}^2 + f_{xzz}f_{xyy} - f_{yyz}f_{xxz} + f_{yzz}f_{xxy} = 0.$$

Уравнения ассоциативности (2) эквивалентны (после замены полевых переменных $a^1 = f_{xxx}$, $a^2 = f_{xxy}$, $a^3 = f_{xxz}$, $a^4 = f_{xyy}$, $a^5 = f_{xyz}$, $a^6 = f_{xzz}$) коммутирующим системам гидродинамического типа:

$$a^i_y = U^i_j(a)a^j_x, \qquad a^i_z = V^i_j(a)a^j_x, \qquad i = 1,\dots,6, \tag{3}$$

полученным из естественных соотношений совместности на производные функции $f(t^2,\dots, t^4)$ с использованием уравнений ассоциативности (2) (Ferapontov, Mokhov, 1996, Мохов, 1998). Кроме того, в (Ferapontov, Mokhov, 1996, Мохов, 1998)) найдена общая гамильтонова структура Дубровина–Новикова первого порядка систем гидродинамического типа (3).

В статье (Pavlov, Vitolo, 2014) из спектральной задачи для уравнений ассоциативности (2) были построены законы сохранения систем (3), в частности, законы сохранения с плотностями интегралов $h_{1k} = G^{(k)}_{ij}u^i_x u^j_x$ (в переменных u^i, связанных с переменными a^i по формулам Виета). Отметим, что из этих законов сохранения в статье (Pavlov, Vitolo, 2014) построена общая вторая гамильтонова структура Дубровина–Новикова третьего порядка систем (3), согласованная с первой, и таким образом показана бигамильтоновость уравнений ассоциативности (2).

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию плотностей интегралов h_{1k}, k=1, 2, 3, в качестве плотности первого интеграла $I = \int(\lambda G^{(1)}_{ij} + \mu G^{(2)}_{ij} + \nu G^{(3)}_{ij})u^i_x u^j_x\, dx$. Метрика интеграла I и, соответственно, сам интеграл I невырожденны при любых λ, μ, ν таких, что $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq \nu$, $\mu \neq \nu$, а значит, в таком случае можно осуществить редукцию систем (3) на множество стационарных точек интеграла I. В данной работе найден явный вид гамильтонианов канонически гамильтоновых редукций каждой из систем (3) на множество стационарных точек интеграла I. Вычисления проведены в Wolfram Mathematica.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00316).

Ключевые слова: уравнения ассоциативности, редукция на множество стационарных точек интеграла, каноническая гамильтонова система

Литература

Мохов О.И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39. № 4. С. 173–174.

Мохов О.И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Известия АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 6. С. 1345–1352.

Мохов О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192.

Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E. Topological strings in d < 1 // Nucl. Phys. B. 1991. Vol. 352. No. 1. P. 59–86.

Dubrovin B.A. Geometry of 2D topological field theories // Preprint SISSA-89/94/FM, SISSA. Trieste: Italy, 1994; Lecture Notes in Math. 1996. Vol. 1620. P. 120–348. arXiv:hep-th/9407018 (1994).

Ferapontov E.V., Mokhov O.I. On the Hamiltonian representation of the associativity equations. Algebraic aspects of integrable systems: In memory of Irene Dorfman. Eds. I.M. Gelfand, A.S. Fokas. Birkhäuser. Boston. 1996. P. 75–91.

Pavlov M.V., Vitolo R.F. On the Bi-Hamiltonian Geometry of WDVV Equations // Lett. Math. Phys. 2015. Vol. 105. No. 8. P. 1135–1163; arXiv:1409.7647[math-ph] (2014).

Witten E. On the structure of topological phase of two-dimensional gravity // Nucl. Phys. B. 1990. Vol. 340. No. 2–3. P. 281–332.

ON THE HAMILTONIAN REDUCTION OF THE ASSOCIATIVITY EQUATIONS IN THE CASE OF FOUR PRIMARY FIELDS

Strizhova N.A.

L.D.Landau Institute for Theoretical Physics of RAS,
Akademika Semenova av., 1-A, Chernogolovka, Moscow Region, 142432, Russia
e-mail: nanapavl@gmail.com
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

The associativity equations arose in the papers of Witten (Witten, 1990) and Dijkgraaf, Verlinde, (Dijkgraaf et al., 1991) on two-dimensional topological field theories and subsequently they became to play a key role in many other important domains of mathematics and mathematical physics: in quantum cohomology, Gromov–Witten invariants, enumerative geometry, theory of submanifolds and so on. In Mokhov's papers (Mokhov, 1984), (Mokhov, 1987) a general fundamental principle stating a canonical Hamiltonian property for the restriction of an arbitrary flow on the set of stationary points of its nondegenerate integral was proposed and proved. In this paper the Hamiltonians of the reductions of the associativity equations with antidiagonal matrix η_{ij} in the case of four primary fields according to Mokhov`s construction is found in an explicit form.

Let us introduce the associativity equations following (Dubrovin, 1994). Let $F(t^1, t^2, \dots, t^n)$ be a function of n variables such that the following conditions are satisfied ($\partial^3 F/\partial t^i \partial t^j \partial t^k = F_{ijk}$): (i) the matrix $\eta_{ij} = F_{1ij}$, $i, j = 1,\dots,n,$ is constant and nondegenerate, (ii) for all $t = (t^1, \dots, t^n)$, the functions $c^k_{ij}(t) = \eta^{ks} F_{sij}$, $i, j, k = 1, \dots, n,$ define a structure of an associative algebra with the basis $e_1, \dots, e_n$ and the multiplication law $e_i \circ e_j = c^k_{ij}(t) e_k$. The system of equations on the third partial derivatives of the function $F(t^1,\dots,t^n)$ that is equivalent to the associativity condition in this algebra:

$$\eta^{pq} F_{pij} F_{qkl} = \eta^{pq} F_{pil} F_{qjk}, \tag{1}$$

is called the Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde (WDVV) system or the associativity equations.

Consider the matrix $\eta_{ij} = \delta_{i+j,5}$, $i, j = 1,\ldots, 4$, in the case of four primary fields ($n = 4$). The function $F(t^1, t^2, t^3, t^4) = (t^1)^2 t^4/2 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3, t^4)$ and the associativity equations ($x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$)

$$-2 f_{xyz} - f_{xyy} f_{xxy} + f_{yyy} f_{xxx} = 0, \qquad -f_{xzz} - f_{xyy} f_{xxz} + f_{yyz} f_{xxx} = 0, \tag{2}$$

$$-2 f_{xyz} f_{xxz} + f_{xzz} f_{xxy} + f_{yzz} f_{xxx} = 0, \quad f_{zzz} - f_{xyz}{}^2 + f_{xzz} f_{xyy} - f_{yyz} f_{xxz} + f_{yzz} f_{xxy} = 0.$$

correspond to the matrix η_{ij}. The associativity equations (2) are equivalent (under the change of variables $a^1 = f_{xxx}$, $a^2 = f_{xxy}$, $a^3 = f_{xxz}$, $a^4 = f_{xyy}$, $a^5 = f_{xyz}$, $a^6 = f_{xzz}$) to the commuting hydrodynamic type systems:

$$a^i_y = U^i_j(a) a^j_x, \qquad a^i_z = V^i_j(a) a^j_x, \qquad i = 1,\ldots, 6, \tag{3}$$

obtained from the natural compatibility conditions on derivatives of the function $f(t^2, t^3, t^4)$ using the associativity equations (2) (Ferapontov, Mokhov, 1996, Mokhov, 1998). Moreover, the joint first-order Dubrovin–Novikov Hamiltonian structure of the hydrodynamic type systems (3) was found in (Ferapontov, Mokhov, 1996, Mokhov, 1998).

In the paper (Pavlov, Vitolo, 2014) conservations laws were found from the spectral problem for the associativity equations (2), in particular, the densities of integrals of the conservations laws $h_{1k} = G^{(k)}_{ij} u^i_x u^j_x$, where the variables u^i are connected with the variables a^i by Viete's formulae. Note that the joint second Dubrovin–Novikov Hamiltonian structure of the third order, which is compatible with the first one, for the associativity equations (2) is constructed from the above conservation laws, so the bi-Hamiltonian property of the associativity equations (2) was proved.

We consider arbitrary linear combination of the densities of integrals of the conservation laws h_{1k}, $k = 1, 2, 3$, as the density of the first integral $I = \int (\lambda G^{(1)}_{ij} + \mu G^{(2)}_{ij} + \nu G^{(3)}_{ij}) u^i_x u^j_x \, dx$. The metric of the first integral I, and respectively the integral I, is nondegenerate for all λ, μ, ν such that $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq \nu$, $\mu \neq \nu$, then in this case we can reduce the systems (3) on the set of stationary points of the integral I. In this paper, the explicit form of the Hamiltonians of canonical Hamiltonian reductions of both systems (3) on the set of stationary points of the integral I is obtained. Computations were performed by Wolfram Mathematica.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant No. 18-11-00316.

Keywords: associativity equations, reduction on the set of stationary points of its nondegenerate integral, canonical Hamiltonian system

References

Mokhov O.I. The Hamiltonian property of an evolutionary flow on the set of stationary points of its integral. *Russian Mathematical Surveys*, 1984, Vol. 39, No. 4. pp. 133–134.

Mokhov O.I. On the Hamiltonian property of an arbitrary evolution system on the set of stationary points of its integral. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1988, Vol. 31, No. 3, pp. 657–664.

Mokhov O.I. Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifolds, and integrable systems. *Russian Mathematical Surveys,* 1998, Vol. 53, No. 3, pp. 515–622.

Dijkgraaf R., Verlinde H., and Verlinde E. Topological strings in d < 1. *Nucl. Phys. B*, 1991, Vol. 352, No. 1, pp. 59–86.

Dubrovin B.A. Geometry of 2D topological field theories. Preprint SISSA-89/94/FM, SISSA, Trieste: Italy, 1994, *Lecture Notes in Math,* 1996, Vol. 1620, pp. 120–348; arXiv: hep-th/9407018 (1994).

Ferapontov E.V. and Mokhov O.I. On the Hamiltonian representation of the associativity equations. Algebraic aspects of integrable systems: In memory of Irene Dorfman. Eds. I.M. Gelfand, A.S. Fokas, Boston: Birkhäuser, 1996, pp. 75–91.

Pavlov M.V. and Vitolo R.F. On the Bi-Hamiltonian Geometry of WDVV Equations. *Lett. Math. Phys*, 2015, Vol. 105, No. 8, pp. 1135–1163; arXiv:1409.7647[math-ph] (2014).

Witten E. On the structure of topological phase of two-dimensional gravity. *Nucl. Phys. B*, 1990, Vol. 340, No. 2–3, pp. 281–332.