

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ЛИУВИЛЛЮ РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ НА МНОЖЕСТВО СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК ИНТЕГРАЛА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ПРИМАРНЫХ ПОЛЕЙ

Мохов О.И., Стрижова Н.А.

*Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
проспект Академика Семенова, д. 1-А, г. Черноголовка, Московская обл., Россия
e-mail: mokhov@landau.ac.ru, e-mail: nanapavl@gmail.com*

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

В данной работе построена редукция уравнений ассоциативности (системы уравнений Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде, см. (Witten, 1990, Dijkgraaf et al., 1991, Dubrovin, 1994) с антидиагональной матрицей η_{ij} на множество стационарных точек невырожденного квадратичного по производным первого порядка интеграла в случае трех примарных полей и доказана ее интегрируемость по Лиувиллю. В статье Мохова (Mokhov, 1995), см. также (Мохов, 1998), эти уравнения ассоциативности были представлены в виде интегрируемой недиагонализуемой системы гидродинамического типа. В работах (Мохов, Ферапонтов, 1996, Ferapontov et al., 1997), Мохов, 1998), было найдено бигамильтоново представление для этих уравнений и квадратичный по производным первого порядка невырожденный интеграл. Используя конструкцию Мохова, работы (Мохов, 1984, Мохов, 1987) о канонической гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее невырожденного интеграла, мы построили редукцию для квадратичного по производным первого порядка интеграла, явно нашли гамильтониан соответствующей канонической гамильтоновой системы. Для построенной редукции уравнений ассоциативности найдены три функционально независимых интеграла в инволюции относительно канонической скобки Пуассона на фазовом пространстве и таким образом доказана ее интегрируемость по Лиувиллю.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00316).

Ключевые слова: интегрируемость по Лиувиллю, интегралы в инволюции, уравнения ассоциативности, редукция на множество стационарных точек интеграла, каноническая гамильтонова система

Литература

- Мохов О.И.* Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // *Успехи матем. наук.* 1984. Т. 39. № 4. С. 173–174.
- Мохов О.И.* О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // *Известия АН СССР. Сер. матем.* 1987. Т. 51. № 6. С. 1345–1352.
- Мохов О.И., Ферантонтов Е.В.* Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализуемые системы гидродинамического типа // *Функц. анализ и его прил.* 1996. Т. 30. № 3. С. 62–72.
- Мохов О.И.* Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // *Успехи матем. наук.* 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192.
- Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E.* Topological strings in $d < 1$ // *Nucl. Phys. B.* 1991. Vol. 352. No. 1. P. 59–86.
- Dubrovin B.A.* Geometry of 2D topological field theories // Preprint SISSA-89/94/FM, SISSA, Trieste, Italy, 1994. *Lecture Notes in Math.* 1996. Vol. 1620. P. 120–348. arXiv:hep-th/9407018 (1994).
- Ferapontov E.V., Galvao C.A.P., Mokhov O.I., Nutku Y.* Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // *Comm. Math. Phys.* 1997. Vol. 186. P. 649–669.
- Mokhov O.I.* Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // *Topics in Topology and Mathematical Physics.* Ed. S.P. Novikov. Amer. Math. Soc. Providence, RI. 1995. P. 121–151. arXiv: hep-th/9503076 (1995).
- Witten E.* On the structure of topological phase of two-dimensional gravity // *Nucl. Phys. B.* 1990. Vol. 340. No. 2–3. P. 281–332.

LIOUVILLE INTEGRABLE REDUCTIONS OF THE ASSOCIATIVITY EQUATIONS ON THE SET OF STATIONARY POINTS OF AN INTEGRAL IN THE CASE OF THREE PRIMARY FIELDS

Mokhov O.I.¹, Strizhova N.A.²

*L.D.Landau Institute for Theoretical Physics of RAS,
Akademika Semenova av., 1-A, Chernogolovka, Moscow Region, 142432, Russia
e-mail: mokhov@landau.ac.ru, e-mail: nanapavl@gmail.com*

Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

In this work, in the case of three primary fields, a reduction of the associativity equations (the Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde system, see (Witten, 1990, Dijkgraaf et al., 1991, Dubrovin, 1994) with antidiagonal matrix η_{ij} on the set of stationary points of a nondegenerate integral quadratic with respect to the first-order partial derivatives is constructed in an explicit form and its Liouville integrability is proved. In Mokhov’s paper (Mokhov, 1995, Mokhov, 1998), these associativity equations were presented in the form of an integrable nondiagonalizable system of hydrodynamic type. In the papers

(Ferapontov, Mokhov, 1996, Ferapontov et al., 1997, Mokhov, 1998), a bi-Hamiltonian representation for these equations and a nondegenerate integral quadratic with respect to the first-order partial derivatives were found. Using Mokhov's construction on canonical Hamiltonian property of an arbitrary evolutionary system on the set of stationary points of its nondegenerate integral of the papers (Mokhov, 1984, Mokhov, 1987), we construct explicitly the reduction for the integral quadratic with respect to the first-order partial derivatives, found explicitly the Hamiltonian of the corresponding canonical Hamiltonian system. We also found three functionally-independent integrals in involution with respect to the canonical Poisson bracket on the phase space for the constructed reduction of the associativity equations and thus proved the Liouville integrability of this reduction.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant No. 18-11-00316.

Keywords: Liouville integrability, integrals in involution, associativity equations, reduction on the set of stationary points of its nondegenerate integral, canonical Hamiltonian system

References

- Dijkgraaf R., Verlinde H., and Verlinde E.* Topological strings in $d < 1$. *Nucl. Phys. B*, 1991, Vol. 352, No. 1, pp. 59–86.
- Dubrovin B.A.* Geometry of 2D topological field theories. Preprint SISSA-89/94/FM, SISSA, Trieste, Italy, 1994, *Lecture Notes in Math.*, 1996, Vol. 1620, pp. 120–348, arXiv: hep-th/9407018 (1994).
- Ferapontov E.V. and Mokhov O.I.* The associativity equations in the two-dimensional topological field theory as integrable Hamiltonian nondiagonalizable systems of hydrodynamic type, 1996, Vol. 30, No. 3, pp. 195–203, arXiv:hep-th/9505180 (1995).
- Ferapontov E.V., Galvao C.A.P., Mokhov O.I., and Nutku Y.* Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory. *Comm. Math. Phys.*, 1997, Vol. 186, pp. 649–669.
- Mokhov O.I.* On the Hamiltonian property of an arbitrary evolution system on the set of stationary points of its integral. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1988, Vol. 31, No. 3, pp. 657–664.
- Mokhov O.I.* Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations. Topics in Topology and Mathematical Physics, Ed. S.P. Novikov. *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1995, pp. 121–151, arXiv: hep-th/9503076 (1995).
- Mokhov O.I.* Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifolds, and integrable systems. *Russian Mathematical Surveys*, 1998, Vol. 53, No. 3, pp. 515–622.
- Mokhov O.I.* The Hamiltonian property of an evolutionary flow on the set of stationary points of its integral. *Russian Mathematical Surveys*, 1984, Vol. 39, No. 4, pp. 133–134.
- Witten E.* On the structure of topological phase of two-dimensional gravity. *Nucl. Phys. B.*, 1990, Vol. 340, No. 2–3, pp. 281–332.