© Кузнецов Е.А., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 78–79

УДК 534.222.2 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).22

КВАЗИ-ЛАГРАНЖЕВОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ И БУССИНЕСКА В НЕВЯЗКОМ ПРЕДЕЛЕ

Кузнецов Е.А.

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Ленинский пр-кт 53с4
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН Черноголовка,
просп. Академика Семенова, 1А, Москва,142432.
e-mail: kuznetso@itp.ac.ru
Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

Для систем гидродинамического типа, описывающих локально несжимаемые двумерные течения жидкостей в отсутствии диссипации, предложен квази-лагранжевый метод их интегрирования. Этот метод основан на применении неполного преобразования Лежандра, когда независимыми переменными становятся лагранжев инвариант (т.е. неизменная величина вдоль траектории жидкой частицы) вместо одной из двух декартовых координат, а остальные – другая декартова координата и время – остаются неизменными. Таким образом, этот метод основан на обратном преобразовании одной из декартовых координат и по этой причине отличается от полного преобразования Лежандра. Классический пример полного преобразования Лежандра – это преобразование годографа для решения уравнений одномерного изоэнтропического течения газа. В данной работе показано, что уравнение для лагранжевого инварианта после применения неполного преобразования Лежандра и введения функций тока превращается в линейное уравнение и может быть разрешено путем введения производящей функции. Этот метод оказался эффективным для решения двумерного невязкого уравнения Прандтля (это уравнение описывает поведение погранслоя), что дало возможность проинтегрировать это уравнение полностью. В качестве лагранжевого инварианта в случае нулевого градиента давления выступает компонента скорости вдоль твердой границы. Полученное решение записывается через начальные условия и удовлетворяет граничным условиям непротекания на твердой границе. Анализ этих решений показывает возникновение особенности для градиента скорости на границе. Эта особенность возникает за счет опрокидывания потока. В точке опрокидывания градиент скорости обращается в бесконечность по степенному закону $\sim (t_0-t)^{-1}$, где t_0 – время образования особенности. Данное решение описывает появление сингулярности типа складки, которое, возможно, связано с явлением отрыва. Показано также, что уравнение Прандтля допускает интегрирование для произвольной зависимости давления от продольной координаты. Наиболее просто ответы записываются для случая постоянного градиента давления вдоль стенки. Для системы Буссинеска уравнение для плотности может быть разрешено с помощью этого метода, в результате система сводится к одному уравнению для производящей функции.

Данная работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований президиума РАН «Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения».

Ключевые слова: преобразования Лежандра, опрокидывание, уравнение Прандтля

QUSI-LAGRANGIAN INTEGRATION OF TWO-DIMENSIONAL PRANDTL AND BOUSSINESQ EQUATIONS IN THE INVISCID LIMIT

Kuznetsov E.A.

P.N. Lebedev Physical Institute of RAS, Moscow
L.D. Landau Institute for Theoretical Physics of RAS, Moscow
e-mail: kuznetso@itp.ac.ru
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

For the hydrodynamic type systems locally describing incompressible two-dimensional fluid flows without dissipation we suggest quasi-Lagrangian approach for their integration. This method is based on application of incomplete Legendre transformation when the independent variables become a Lagrangian invariant (i.e. the constant quantity along the fluid particle trajectory), instead of one of the spatial coordinate, and the rest ones which are another spatial coordinate and time. Thus, this method is based on the inverse transform of one of the spatial coordinate and by this reason differs from the the complete Legendre transformation. The classical example of the complete Legendre transformation is the Hodograph transformation applying to solve the equations for one-dimensional isoentropycal gas flows. In this paper it is shown that equation for the Lagrangian invariant after applying the incomplete Legendre transformation and introducing the stream function transforms into the linear eqation can be resolved by means of the generating function introduction. This method is turned to be effective for solving the inviscid two-dimensional Prandtl equation (this equation describes the boundary layer behavior) that allows one to integrate this equation completely. In the case of the constant pressure along the boundary the parallel velocity component represents the Lagrangian invariant. The obtained solution is written through the initial data and satisfies the non-penetrate boundary condition. Analysis of this solution shows the formation of the singularity for the velocity gradient on the wall. This singularity appears as the result of breaking. At the breaking point the velocity gradient tends to infinity according to the power $\sim (t_0-t)^{-1}$ where t_0 is the singular time. This solution describes the appearance of the folding type singularity. It is shown also that the Prandtl equation admits complete integration for arbitrary dependence of pressure on the longitudinal coordinate. The simplest solution is written for the case of the constant pressure gradient. For the Boussinesq system the equation for density can be resolved by this method that reduces to one equation for the generating function.

This work was supported by the RAS Presidium Program «Nonlinear dynamics: fundamental problems and applications».

Keywords: the Legendre transformation, breaking, Prandtl equation