© Копьев В.Ф., Чернышев С.А., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 74–77

УДК 532.5 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).21

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ В ЗАДАЧАХ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ И ЕГО СВЯЗЬ С ВАРИАЦИОННЫМ ПРИНЦИПОМ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

Копьев В.Ф.[1], Чернышев С.А.[1]

[1]ФГУП «ЦАГИ», Московский комплекс, Московская область г. Жуковский, ул. Жуковского, 1 105005, Россия, e-mail: vkopiev@mktsagi.ru

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

В работе рассматривается описание вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости на основе формализма лагранжевой механики. Используя поле смещения жидких частиц в качестве обобщенной координаты, выписывается лагранжиан, описывающий динамику малых возмущений (Копьев, Чернышев, 2018). Соответствующие уравнения Лагранжа представляют собой уравнение для поля смещения (Drazin, Reid, 1981). Это уравнение эквивалентно уравнению Гельмгольца для возмущений завихренности. Поле смещения определяется как разность положений жидких частиц на траекториях в возмущенном и невозмущенном течениях. Хотя это определение дается в терминах лагранжевых переменных, связанных с жидкими частицами, само поле смещения является эйлеровой переменной, выражающейся через возмущения скорости и завихренности.

Рассмотрен пример использования лагранжиана для решения задачи о сохранении квадрупольного момента вихревого течения. С использованием теоремы Нетер получены условия на стационарное течение, при выполнении которых квадрупольный момент малых возмущений этого течения является интегралом движения (Копьев, Чернышев, 2018). Показано, что эти условия выполняются для струйных течений, однородных вдоль продольной координаты. Полученный результат имеет важное значение в аэроакустике в связи с тем, что квадрупольный момент вихревого течения представляет собой главный член разложения компактного акустического источника по числу Маха (Lighthill, 1952; Crow, 1970).

Рассмотрено обобщение этих результатов на нелинейный случай. Получен лагранжиан для произвольного нелинейного поля смещения. Соответствующие уравнения Лагранжа совпадают с дифференциальными уравнениями, описывающими нелинейную динамику поля смещения (Morrison, 1998), а разложение лагранжиана по малым возмущениям до квадратичных членов дает лагранжиан линейной системы.

Рассматривается вопрос о взаимосвязи предложенного подхода к описанию динамики несжимаемой жидкости и известных подходов, основанных на форма-

лизме лагранжевой механики с координатами жидких частиц в качестве обобщенных координат (Chapman, 1978; Гончаров, Павлов, 2008; Кузнецов, Рубан, 1998). Показано, что переход от лагранжиана, полученного в (Кузнецов, Рубан, 1998), к виду для произвольного нелинейного поля смещения, может быть осуществлен преобразованием лагранжевых переменных (координат жидких частиц) к эйлеровым переменным (полю смещения). Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №17-11-01271.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, лагранжиан, завихренность, поле смещения, жидкие частицы, интегралы движения, квадрупольный момент

Литература

Гончаров В.П., Павлов В.И. Гамильтоновая вихревая и волновая динамика. М.: ГЕОС, 2008. 431 с.

Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Развитие методов лагранжевой и гамильтоновой механики применительно к задачам аэроакустики // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 677–688.

Кузнецов Е.А., Рубан В.П. Гамильтоновская динамика вихревых линий в системах гидродинамического типа // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 67. № 12. С. 1015–1020.

Chapman D. Ideal vortex motion in two dimensions: symmetries and conservation laws // J. Math. Phys. 1978. Vol. 19(9). P. 1988–1992.

Crow S.C. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem // Studies in Applied Mathematics. 1970. Vol. 49. No. 1. P. 21–44.

Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Lighthill M.I. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. R. Soc. 1952. Vol. A222, No. 1148. P. 1–32.

Morrison, P.J. Hamiltonian description of the ideal fluid // Review of Modern Physic, 1998, Vol. 70, No. 2, pp.467–521.

LAGRANGIAN FORMALISM IN PROBLEMS OF SMALL OSCILLATIONS OF VORTEX FLOWS AND ITS CONNECTION WITH THE VARIATIONAL PRINCIPLE FOR IDEAL INCOMPRESSIBLE HYDRODYNAMICS OF VORTEX LINES

Kopiev V.F.[1], Chernyshev S.A.[1]

[1]*Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Moscow Complex, Moscow, 105005, Russia, e-mail: vkopiev@mktsagi.ru*

Submitted 10.09.2018, accepted 10.11.2018

The paper discusses the description of vortex flows of an ideal incompressible fluid based on the formalism of Lagrangian mechanics. Using the displacement field of liquid particles as a generalized coordinate, we write out the Lagrangian describing

the dynamics of small perturbations (Kopiev, Chernyshev, 2018). The corresponding Lagrange equations are the equation for the displacement field (Drazim, Reid, 1981): This equation is equivalent to the Helmholtz equation for vorticity perturbations. The displacement field is defined as the difference in the positions of liquid particles on trajectories in disturbed and undisturbed flows. Although this definition is given in terms of Lagrangian variables associated with liquid particles, the displacement field itself is an Euler variable, expressed through velocity and vorticity perturbations. An example of using Lagrangian to solve the problem of conservation of the quadrupole moment of a vortex flow is considered. Using the Noether theorem, conditions on a stationary flow are obtained, under which the quadrupole moment of small perturbations of this flow is an integral of motion (Kopiev, Chernyshev, 2018). It is shown that these conditions are satisfied for the jet flows uniform along the longitudinal coordinate. The result obtained is important in aeroacoustics due to the fact that the quadrupole moment of the vortex flow represents the main term of the decomposition of a compact acoustic source in Machnumber (Lighthill, 1952; Crow, 1970; Kopiev, Chernyshev, 1995).

The generalization of these results to the nonlinear case is considered. The Lagrangian is obtained for an arbitrary nonlinear displacement field: nowhere Gis Green's function of the Laplace equation. The corresponding Lagrange equations coincide with the differential equations describing the nonlinear dynamics of the displacement field (Drazin, Reid, 1981). Expansion of the Lagrangian in small perturbations to quadratic terms gives the Lagrangian of the linear system. The question of the relationship of the proposed approach to the description of the dynamics of an incompressible fluid and known approaches based on the formalism of Lagrangian mechanics with the coordinates of liquid particles as generalized coordinates (Chapman, 1978; Goncharov, Pavlov, 2008; Kuznetsov, Ruban, 1998) is considered. It is shown that the transformation of the Lagrangian obtained in (Kuznetsov, Ruban, 1998) to the Lagrangian can be carried out by transforming Lagrangian variables (coordinates of liquid particles) to Eulerian variables (displacement field). This study was supported by the Russian Science Foundation, project No. 17-11-01271.

Keywords: incompressible fluid, Lagrangian, vorticity, displacement field, liquid particles, integrals of motion, quadrupole moment

References

Crow S.C. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Studies in Applied Mathematics*, 1970, Vol. 49, No. 1, pp. 21–44.

Chapman D. Ideal vortex motion in two dimensions: symmetries and conservation laws. *J. Math. Phys*, 1978, Vol. 19(9), pp. 1988–1992.

Drazin P.G. and Reid W.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Goncharov V.P. and Pavlov V.I. Gamil'tonovaya vihrevaya i volnovaya dinamika (Hamiltonian vortex and wave dynamics). Moscow: GEOS, 2008, 432 p.

Kopiev V.F. and Chernyshev S.A. Razvitie metodov lagranzhevoj i gamil'tonovoj mekhaniki primenitel'no k zadacham aehroakustiki (Methods of the Lagrangian and Hamiltonian Mechanics in Aeroacoustics Problems). *Acoustical Physics*, 2018, Vol. 64, No. 6, pp. 693–703.

Kuznetsov E.A. and Ruban V.P. Gamil'tonovskaya dinamika vihrevyh linij v sistemah gidrodinamicheskogo tipa *(*Hamiltonian dynamics of vortex lines in hydrodynamic-type systems). *JETP Letters,* 1998, Vol. 67, No. 12, pp. 1015–1020.

Lighthill M.I. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. *Proc. R. Soc,* 1952, Vol. A222, No. 1148, pp. 1–32.

Morrison, P.J. Hamiltonian description of the ideal fluid. *Review of Modern Physic*, 1998, Vol.70, No. 2, pp. 467–521.