

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СЕРРА

Иванов С.К.^{1,2}, Камчатнов А.М.^{1,2}

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Институтский пер., 9, Долгопрудный, 117303, Россия

²Институт спектроскопии РАН, Москва, Троицк, Физическая ул., 5, 108840, Россия
e-mail: ivanoff.iks@gmail.com

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

Хотя теория мелкой воды является классическим предметом исследований с огромным количеством посвященных ей работ, она по-прежнему остается очень активной областью исследований со множеством важных приложений. В случае пренебрежения эффектами диссипации и неровностью дна, присутствие нелинейности и дисперсии приводит к довольно сложным волновым формам, которые в решающей степени зависят от начального профиля импульса. Если эффекты нелинейности и дисперсии учитываются в самом низком приближении и имеется только однонаправленное распространение волны, то ее динамика определяется знаменитым уравнением Кортевега-де Фриза (КдФ). Сравнение с экспериментами показывает, что приближение КдФ недостаточно хорошо и нужно выйти за его пределы. Поэтому значительные усилия были направлены на выведение соответствующего волнового уравнения, которое было бы способно лучше описывать систему. Одна из самых популярных моделей была впервые предложена и подробно изучена Серра (Serre, 1953). Для такой модели, в которой эволюция описывается уравнением Серра (Су-Гарднера, Грина-Нахди), Элем было сделано важное исследование закона сохранения «количества волн» и его солитонного аналога (El, 2006), с помощью которого можно найти законы движения краев дисперсионной ударной волны (ДУВ) в задачах, связанных с автомодельной эволюцией ступени, таких как начальные разрывы. В работе (Kamchatnov, 2018) были показаны методы, позволяющие выйти за рамки такого начального профиля. В настоящей статье мы покажем применение методов этой работы к исследованию эволюции начальных импульсов в виде простой волны в теории уравнений Серра и дадим аналитическое решение для законов движения краев ДУВ, образуемых в процессе эволюции начального импульса. Аналитические результаты подтверждены численными расчетами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-01-00178 А.

Ключевые слова: уравнение Серра, уравнение Грина-Нахди, уравнение Су-Гарднера, дисперсионная ударная волна, простая волна, ундулярный бор, теория Уизема, теория Эля

Литература

- El G.A.* Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion // *Chaos*. 2005. Vol. 15. No. 037103; *ibid.* 2006. Vol. 16. No. 029901.
- Kamchatnov A.M.* On the dispersive shock waves theory for non-integrable equations: arXiv:1809.08553: Cornell University Library. 2018.
- Serre F.* Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // *La Houille Blanche*. 1953. Vol. 8. P. 374–388. P. 830–887.

WAVE PULSE EVOLUTION FOR FULLY NONLINEAR SERRE EQUATION

Ivanov S.K. ^{1,2}, **Kamchatnov A.M.** ^{1,2}

¹*Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky lane 9, Dolgoprudny,
Moscow region, 141700, Russia*

²*Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840, Russia
e-mail: ivanoff.iks@gmail.com*

Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

Although the shallow-water theory is a classical subject of investigations with a huge number of papers devoted to it, it still remains very active field of research with many important applications. When one neglects dissipation effects and non-uniformity of the basin's bottom, the interplay of nonlinearity and dispersion effects leads to quite complicated wave patterns which form depends crucially on the initial profile of the pulse. If the nonlinearity and dispersion effects are taken into account in the lowest approximation and one considers a one-directional propagation of the wave, then its dynamics is governed by the famous Korteweg-de Vries (KdV) equation. Comparison with experiments shows that the KdV approximation is not good enough and one needs to go beyond it. Therefore considerable efforts were directed to the derivation of the corresponding wave equation that was able to better describe the system. One of the most popular models was first suggested and studied in much detail by Serre (Serre, 1953). For such a model, in which evolution is described by the Serre (Su-Gardner, Green- Naghdi) equation, El made an important study of the law of conservation of the “number of waves” and its soliton analogue (El, 2006). Using El's method one can find the laws of motion of the edges of the dispersive shock waves (DSW) in problems related with self-similar evolution of step-like initial discontinuities. In (Kamchatnov, 2018) these methods were shown that allow one to go beyond such an initial profile. In this report, we will show the application of the methods of this work to study of simple wave initial pulses evolution in the theory of the Serre equations and give an analytical solution for the laws of motion of edges of DSW formed in the process of evolution of the initial pulses. Analytical results are confirmed by numerical calculations.

The reported study was funded by RFBR according to the research project №19-01-00178 A.

Иванов С.К., Камчатнов А.М.

Keywords: Serre equation, Green-Nahdi equation, Su-Gardner equation, dispersion shock wave, simple wave, undular bore, Whitham theory, El theory

References

- El G.A.* Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion. *Chaos*, 2005, Vol. 15, No. 037103; *ibid.* 2006, Vol. 16, No. 029901.
- Kamchatnov A.M.* On the dispersive shock waves theory for non-integrable equations: arXiv:1809.08553: Cornell University Library, 2018.
- Serre F.* Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, 1953, Vol. 8, pp. 374–388, pp. 830–887.