© Дьяченко А.И., Дьяченко С.А., Лушников П.М., Захаров В.Е., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 51–54

УДК 532.5.031 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).13

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И НЕКАНОНИЧЕСКАЯ ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Дьяченко А.И.[1], Дьяченко С.А.[2], Лушников П.М.[1], Захаров В.Е.[1]

[1]Институт Теоретической физики им. Л.Д. Ландау, Черноголовка, просп. Академика Семенова, 1А 142432, Россия
e-mail: alexd@itp.ac.ru
[2]Факультет математики, Иллинойский университет в Урбана-Шампейн, США
e-mail: sdyachen@math.uiuc.edu
Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

В работе рассматривается потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и бесконечной глубиной в двух измерениях в поле тяжести и с поверхностным натяжением.

Рассматривается зависящее от времени конформное отображение $z(w, t)$ нижней комплексной полуплоскости переменной w в область, заполненную жидкостью, где действительная ось w отображается на поверхность свободной жидкости. Мы изучаем динамику особенностей как $z(w, t)$, так и комплексного потенциала жидкости $\Pi(w, t)$ в верхней комплексной полуплоскости w. Мы переформулируем точную эйлерову динамику через неканоническую нелокальную Гамильтонову структуру для пары гамильтоновых переменных (Дьяченко и др., в печати) – мнимая часть $z(w, t)$ и действительная часть $\Pi(w, t)$ заданы на свободной поверхности жидкости.

Соответствующая скобка Пуассона не вырождена, то есть она не имеет инвариантов Казимира. Любые два функционала конформного отображения коммутируют относительно скобки Пуассона. Новая Гамильтонова структура является обобщением канонической Гамильтоновой структуры (Захаров, 1968) (справедлива только для решений, для которых естественная параметризация поверхности однозначна, то есть каждое значение горизонтальной координаты соответствует только одной точке на свободной поверхности). Напротив, новые неканонические гамильтоновы уравнения справедливы для произвольных нелинейных решений (включая многозначную естественную параметризацию поверхности) и эквивалентны уравнениям Эйлера.

Мы также рассматриваем обобщенную гидродинамику с дополнительными физическими членами в гамильтониане и в уравнениях Эйлера, как в (Лушников и Зубарев, 2018), которые могут быть упрощены и которые позволили найти общие классы частных решений. В Эйлеровом случае мы показали существование решения с произвольным конечным числом N из комплексных полюсов в $z_w(w, t)$ и $\Pi_w(w, t)$, которые являются производными $z(w, t)$ и $\Pi(w, t)$ по w (Дьяченко et al., в печати). Эти решения не являются чисто рациональными, поскольку они обычно имеют точки ветвления в других местах верхней комплексной полуплоскости с, как

правило, бесконечным числом листов Римановой поверхности для $z(w, t)$ и $\Pi(w, t)$ (Лушников, 2016).

Порядок полюсов является произвольным для нулевого поверхностного натяжения, в то время как все порядки являются четными для ненулевого поверхностного натяжения. Мы определили, что вычеты $z_w(w, t)$ в этих N точках являются новыми, ранее неизвестными константами движения. Эти константы движения коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона. Кроме этих вычетов имеются и другие интегралы движения. Если все полюсы просты, то число независимых вещественных интегралов движения равно $4N$ для невесомости и $4N$-1 для ненулевой гравитации. Для полюсов более высокого порядка число интегралов увеличивается. Эти нетривиальные константы движения дают аргумент в поддержку гипотезы о полной интегрируемости гидродинамики жидкости со свободной поверхностью.

Работы А. Дьяченко, П. Лушникова и В. Захарова поддержаны госзаданием «Динамика сложных сред».

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, потенциальное течение, интегрируемость, гамильтонов формализм, конформное отображение, сингулярности

Литература

Dyachenko A.I., Lushnikov P.M., Zakharov V.E. Non-Canonical Hamiltonian Structure and Poisson Bracket for 2D Hydrodynamics with Free Surface // Submitted to Journal of Fluid Mechanics. 2019. arXiv:1711.02841.

Dyachenko A.I., Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Zakharov V.E. Dynamics of Poles in 2D Hydrodynamics with Free Surface: New Constants of Motion // (Submitted to Journal of Fluid Mechanics. 2019. arXiv:1809.09584.

Lushnikov P.M., Zubarev N.M. Exact solutions for nonlinear development of Kelvin-Helmholtz instability for counterflow of superfluid and normal components of Helium II // Phys. Rev. Lett. 2018. Vol. 120. P. 204–504.

Lushnikov P.M. Structure and location of branch points for Stokes wave on deep water // Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 800. P. 557–594.

Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a deep fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1968. Vol. 9. P. 190–194.

Океанологические исследования. 2019. Том 47. № 1. С. 51–54

NEW INTEGRALS OF MOTION AND NON-CANONICAL HAMILTONIAN STRUCTURE FOR 2D HYDRODYNAMICS WITH FREE SURFACE

Dyachenko A.I.[1], Dyachenko S.A.[2], Lushnikov P.M.[1], Zakharov V.E.[1]

[1]*Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Chernogolovka, 142432, Russia*
e-mail: alexd@itp.ac.ru
[2]*Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign*
e-mail: sdyachen@math.uiuc.edu
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

We consider a potential motion of ideal incompressible fluid with a free surface and infinite depth in two dimensions with gravity forces and surface tension.

A time-dependent conformal mapping $z(w, t)$ of the lower complex half-plane of the variable w into the area filled with fluid is performed with the real line of w mapped into the free fluid's surface. We study the dynamics of singularities of both $z(w, t)$ and the complex fluid potential $\Pi(w, t)$ in the upper complex half-plane of w. We reformulate the exact Eulerian dynamics through a non-canonical nonlocal Hamiltonian structure for a pair of the Hamiltonian variables (Dyachenko et al., submitted), the imaginary part of $z(w, t)$ and the real part at $\Pi(w, t)$ (both evaluated of fluid's free surface).

The corresponding Poisson bracket is non-degenerate, i.e. it does not have any Casimir invariant. Any two functionals of the conformal mapping commute with respect to the Poisson bracket. New Hamiltonian structure is a generalization of the canonical Hamiltonian structure of (Zakharov, 1968) (valid only for solutions for which the natural surface parametrization is single valued, i.e. each value of the horizontal coordinate corresponds only to a single point on the free surface). In contrast, new non-canonical Hamiltonian equations are valid for arbitrary nonlinear solutions (including multiple-valued natural surface parametrization) and are equivalent to Euler equations.

We also consider a generalized hydrodynamics with the additional physical terms in the Hamiltonian beyond the Euler equations as in (Lushnikov and Zubarev, 2018) with the powerful reductions which allowed to find general classes of particular solutions. In Eulerian case we show the existence of solutions with an arbitrary finite number N of complex poles in $z_w(w, t)$ and $\Pi_w(w, t)$ which are the derivatives of $z(w, t)$ and $\Pi(w, t)$ over w (Dyachenko et al., submitted). These solutions are not purely rational because they generally have branch points at other positions of the upper complex half-plane with generally the infinite number of sheets of the Riemann surface for $z(w, t)$ and $\Pi(w, t)$ (Lushnikov, 2016).

The order of poles is arbitrary for zero surface tension while all orders are even for nonzero surface tension. We find that the residues of $z_w(w, t)$ at these N points are new, previously unknown constants of motion. These constants of motion commute with each other with respect to the Poisson bracket. There are more integrals of motion beyond these residues. If all poles are simple then the number of independent real integrals of motion is $4N$ for zero gravity and $4N$-1 for nonzero gravity. For higher order poles the number of

the integrals is increasing. These nontrivial constants of motion provides an argument in support of the conjecture of complete integrability of free surface hydrodynamics.

Work of A. Dyachenko, P. Lushnikov and V. Zakharov was supported by state assignment «Dynamics of the complex materials».

Keywords: incompressible fluid, potential flow, integrability, Hamiltonian formalism, conformal mapping, singularities

References

Dyachenko A.I., Lushnikov P.M., and Zakharov V.E. Non-Canonical Hamiltonian Structure and Poisson Bracket for 2D Hydrodynamics with Free Surface. Submitted to *Journal of Fluid Mechanics,* 2019, arXiv:1711.02841.

Dyachenko A.I., Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., and Zakharov V.E. Dynamics of Poles in 2D Hydrodynamics with Free Surface: New Constants of Motion. *Submitted to Journal of Fluid Mechanics*, 2019, arXiv:1809.09584.

Lushnikov P.M. and Zubarev N.M. Exact solutions for nonlinear development of Kelvin-Helmholtz instability for counterflow of superfluid and normal components of Helium II. *Phys. Rev. Lett,* 2018, Vol. 120, pp. 204–504.

Lushnikov P.M. Structure and location of branch points for Stokes wave on deep water. *Journal of Fluid Mechanics,* 2016, Vol. 800, pp. 557–594.

Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 1968, Vol. 9, pp.190–194.