© Дьяченко А.И., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 43–50

УДК 532.5.031 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).13

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ 1-D УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА

Дьяченко А.И.

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка, 142432, Россия, e-mail: alexd@itp.ac.ru

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

Введение

Потенциальное течение идеальной несжимаемой двумерной жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле описывается следующей классической системой уравнений:

$$\varphi_{xx}+\varphi_{zz}=0 \quad (\varphi_z \to 0, \; z \to -\infty)$$
$$\eta_t+\eta_x\varphi_x=\varphi_z \quad (z = \eta)$$
$$\varphi_t+1/2(\varphi_x^2+\varphi_z^2)+\varphi_{xx}+gy=0) \quad (z = \eta)$$

здесь $\eta(x, t)$ – профиль поверхности, $\varphi(x, z, t)$ – потенциал скорости течения. Эта система является гамильтоновой (см. Zakharov, 1968) с гамильтоновыми переменными $\eta(x, t)$ – профиль поверхности, и $\psi(x, t) = \varphi(x ,z, t)$ – потенциал на поверхности. Уравнения движений следующие:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\eta}\;\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\psi}, \tag{1}$$

и усеченный (до четвертого порядка) гамильтониан:

$$\frac{1}{2}\iint\left[[g\eta^2+\psi\hat{k}\psi] + [\psi_x^2-(\hat{k}\psi)^2]\eta + [\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))]\right]dx \tag{2}$$

Встречные волны

Напомним очень кратко, что такое уравнение Захарова для волн на воде. Оно может быть получено в два этапа:

Сначала вместо η и ψ введем нормальную комплексную каноническую переменную a_k:

$$\eta_k=\sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k+a_{-k}^*) \qquad \psi_k=-i\sqrt{\frac{g}{2\omega_k}}(a_k-a_{-k}^*) \quad \omega_k=\sqrt{gk}.$$

Преобразование Фурье определим следующим образом:

$$f_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-ikx}dx \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f_k e^{ikx}dx.$$

Каноническое преобразование от a_k к b_k устраняет все нерезонансные члены в гамильтониане (кубические и четвертого порядка). В результате гамильтониан (2) приобретает вид:

$$H = \int \omega_k b_k b_k^* dk + \frac{1}{2}\int T_{kk_1}^{k_2k_3} b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$$

b_k – также нормальная каноническая комплексная переменная. $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ удовлетворяет очевидным условиям симметрии:

$$T_{kk_1}^{k_2k_3} \;=\; T_{k_2k_3}^{k\,k_1} \;=\; T_{kk_1}^{k_3k_2} \;=\; T_{k_1k}^{k_2k_3}. \tag{3}$$

Явное (и громоздкое) выражение для $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ представлено в (Zakharov, 1968 и Dyachenko and Zakharov, 1994). В дальнейшем нам потребуется диагональное значение $T_{kk_1}^{k_2k_3}$

$$T_{kk_1}^{kk_1} = kk_1 / (2\pi) \min(|k|, |k_1|). \tag{4}$$

Уравнение движения выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\frac{\partial H}{\partial b_k^*} = 0, \tag{5}$$

или

$$i\dot{b}_k = \omega_k b_k + \int T_{kk_1}^{k_2k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \tag{6}$$

Кроме энергии и импульсов оно сохраняет специфический интеграл движения – «число волн»:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |b_k|^2 \, dk. \tag{7}$$

Для одномерных волн $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ обладает очень важным свойством (см. (Dyachenko et al. 2017)

$$T_{kk_1}^{k_2k_3} \equiv 0, \text{ если } kk_1k_2k_3 < 0 \tag{8}$$

$b(x, t)$ может быть представлена как сумма двух аналитических функций в комплексной плоскости $z = x + iy$:

$$b(x,t) = b^+(x,t) + b^-(x,t) \quad or \quad b_k = b_k^+ + b_k^- \tag{9}$$

$b^+(x,t)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости, $b^-(x,t)$ является аналитической функцией в нижней полуплоскости, имеет только положительные Фурье гармоники b_k^+, в то время как $b^+(x,t)$ имеет только отрицательные b_k^-. Подставляя (9) в уравнение движения (6), можно получить

$$ib_k^+ + ib_k^- = \omega_k b_k^+ + \omega_k b_k^- + \int [b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- + b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ + \int [b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (10)$$

Последнее слагаемое в (10) равно нулю. Действительно, рассмотрим сначала первый член:

$$k_1 < 0, k_2 > 0, k_3 > 0, \quad k = -k_1 + k_2 + k_3 > 0, \quad kk_1k_2k_3 \to T_{kk_1}^{k_2k_3} \equiv 0.$$

Второй член сокращается аналогично.

Каждый из оставшихся членов уравнения (10) состоит только из положительных или только из отрицательных гармоник. Это также связано со свойством (8). Таким образом, это уравнение можно разделить на два уравнения, одно для положительных, а другое – для отрицательных, а именно:

$$\begin{aligned} i\dot{b}_k^+ &= \omega_k b_k^+ + \int [b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \\ i\dot{b}_k^- &= \omega_k b_k^- + \int [b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта система двух уравнений описывает взаимодействие двух наборов волн, встречных волн (в том числе и стоячие волны). Это гамильтонова система с Гамильтонианом

$$H = \int \omega_k [|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2] dk + \frac{1}{2} \int [b_k^{+^*} b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + b_k^{-^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ + 2\int b_k^{+^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3, \quad (12)$$

и

$$\frac{\partial b_k^+}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta b_k^{+^*}} = 0, \quad \frac{\partial b_k^-}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta b_k^{-^*}} = 0. \quad (13)$$

Эта система имеет два новых интеграла движения: «число волн», движущихся вправо, и «число волн», движущихся влево. Они сохраняются отдельно. Действительно,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int |b^+|^2 dk = i \int [b_k^{+^*} \omega_k b_k^+ - b_k^+ \omega_k b_k^{+^*}] dk + \\ &+ i \int [b_k^{+^*} b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ - b_k^+ b_{k_1}^+ b_{k_2}^{+^*} b_{k_3}^{+^*}] \times T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \\ &+ 2i \int [b_k^{+^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- - b_k^+ b_{k_1}^- b_{k_2}^{+^*} b_{k_3}^{-^*}] \times T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 \equiv 0 \end{aligned}$$

из-за условий симметрии (3). Таким образом:

$$N^{+} = \int_{0}^{\infty} |b_k^{+}|^2 \, dk \qquad N^{-} = \int_{-\infty}^{0} |b_k^{-}|^2 \, dk. \tag{14}$$

Очевидно, общий импульс

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} k[|b_k^{+}|^2 + |b_k^{-}|^2]dk$$

также сохраняется.

Следует отметить, что система (11) может быть радикально упрощена путем применения канонического преобразования, аналогичного преобразованию в (Dyachenko et al., 2017; Dyachenko and Zakharov, 2011; Dyachenko and Zakharov, 2012). Это каноническое преобразование позволит записать эту систему в супер компактном виде, в x-пространстве. Этот набор сверхкомпактных уравнений будет представлен в отдельной статье.

Исследования выполнены в соответствии с госзаданием по теме «Динамика сложных сред».

Ключевые слова: волны на воде, интегралы движения, одномерное уравнение Захарова

Литература

Dyachenko A.I., Kachulin D.I., Zakharov V.E. Super compact equation for water waves // Journal of Fluid Mechanics. 2017. Vol. 828. P. 661–679.

Dyachenko A.I., Zakharov V.E. Is free-surface hydrodynamics an integrable system? // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 190. P. 144–148.

Dyachenko A.I., Zakharov V.E. Compact equation for gravity waves on deep water // JETP Letters. 2011. Vol. 93. No. 12. P. 701–705.

Dyachenko A.I., Zakharov V.E. A dynamic equation for water waves in one horizontal dimension // European Journal of Mechanics – B/Fluids. 2012. Vol. 32. P. 17–21.

Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a depp fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1968. Vol. 9. P. 190–194.

Океанологические исследования. 2019. Том 47. № 1. С. 43–50

ON INTEGRALS OF MOTION OF THE 1-D ZAKHAROV EQUATION

Dyachenko A.I.

Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Chernogolovka, 142432, Russia,
e-mail: alexd@itp.ac.ru
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2018

Introduction

A potential flow of an ideal incompressible 2D fluid with a free surface in a gravity field is described by the following classical system of equation:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad (\varphi_z \;\to\; 0, \;\; z \;\to -\infty)\\
&\eta_t + \eta_x \varphi_x = \varphi_z \quad (z \;=\; \eta)\\
&\varphi_t + 1/2(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \varphi_{xx} + gy = 0) \quad (z \;=\; \eta)
\end{aligned}
$$

here $\eta(x,\ t)$ is the profile of a surface, $\varphi(x,\ z,\ t)$ – is the potential function of the flow. This system is hamiltonian (see Zakharov, 1968) with the Hamiltonian variables $\eta(x,\ t)$ – surface profile, and $\psi(x,\ t) = \varphi(x,\ z,\ t)$ – potential at the surface. Equations of motions are the following:

$$
\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}\;\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \tag{1}
$$

and the truncated (up to forth order) Hamiltonian is

$$
H = \frac{1}{2}\int\Big[[g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi] \;+\; [\psi_x^2 - (\hat{k}\psi)^2]\eta \;+\; [\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi \;+\; \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))]\Big]dx \tag{2}
$$

Counter-Streaming waves

Let us recall very briefly what is the Zakharov equation for water waves. It can be derived by two steps:

1. First, instead of η and ψ, normal canonical variable a_k is introduced:

$$
\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a_{-k}^*) \qquad \psi_k = -i\sqrt{\frac{g}{2\omega_k}}(a_k - a_{-k}^*) \quad \omega_k = \sqrt{gk}
$$

Fourier transformation is defined as follows:

$$
f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-ikx}dx \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f_k e^{ikx}dx.
$$

2. Canonical transformation from a_k to b_k is chosen to cancel all non resonant terms in the Hamiltonian, both cubic and forth order.

As a result the Hamiltonian (2) acquires the form:

$$H=\int\omega_k b_k b_k^* dk+\frac{1}{2}\int T_{kk_1}^{k_2k_3} b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3}\delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$$

b_k – is also normal canonical complex variable. $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ satisfies obvious symmetry conditions

$$T_{kk_1}^{k_2k_3} = T_{k_2k_3}^{k\ k_1} = T_{kk_1}^{k_3k_2} = T_{k_1k}^{k_2k_3}.$$

The explicit (and cumbersome) expression for $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ can be found in Zakharov (1968) and Dyachenko and Zakharov (1994). For the future we need diagonal value of $T_{kk_1}^{k_2k_3}$

$$T_{kk_1}^{kk_1} = kk_1/(2\pi)\min(|k|,|k_1|). \tag{4}$$

The motion equation is the following:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t}+i\frac{\delta H}{\delta b_k^*}=0, \tag{5}$$

or

$$i\dot{b}_k=\omega_k b_k+\int T_{kk_1}^{k_2k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3}\delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \tag{6}$$

Besides energy and momenta it has specific integral of motion - “number of waves”:

$$N=\int_{-\infty}^{\infty}|b_k|^2\, dk. \tag{7}$$

For one-dimensional waves $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ has very important property (see Dyachenko et al. (2017))

$$T_{kk_1}^{k_2k_3}\equiv 0,\ \text{if}\ kk_1k_2k_3<0 \tag{8}$$

$b(x,\ t)$ can be represented as a sum of two analytic functions in the complex plane $z = x + iy$:

$$b(x,t)=b^+(x,t)+b^-(x,t)\quad or\quad b_k=b_k^+ + b_k^- \tag{9}$$

$b^+(x,t)$ is analytic in the upper half-plane, $b^-(x,t)$ is analytic in the lower half-plane, $b^+(x,t)$ has only positive Fourier harmonics b_k^+, while $b^-(x,t)$ has only negative ones, b_k^-.

Plugging (9) into the motion equation (6) one can get

$$\begin{aligned} i\dot{b}_k^+ + i\dot{b}_k^- &= \omega_k b_k^+ + \omega_k b_k^- + \int[b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- + b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^-]T_{kk_1}^{k_2k_3}\delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ &+\int[b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^- b_{k_3}^-]T_{kk_1}^{k_2k_3}\delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \tag{10}$$

The last term in (10) vanishes. Indeed, let us consider first crossed out term:

$$k_1 < 0, k_2 > 0, k_3 > 0, \quad k = -k_1 + k_2 + k_3 > 0, \quad kk_1k_2k_3 \to T_{kk_1}^{k_2k_3} \equiv 0.$$

Second crossed out term vanishes analogously.

Each remaining term in the equation (10) consists of only positive or only negative harmonics. This is also due to property (8). So this equation can be splitted into two equations, one for positive, and other – for negative, namely

$$\begin{aligned} i\dot{b}_k^+ &= \omega_k b_k^+ + \int [b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \\ i\dot{b}_k^- &= \omega_k b_k^- + \int [b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \tag{11}$$

This system of two equations describes interaction of two set of waves, counter-streaming waves, including standing waves. This is hamiltonian system with the Hamiltonian

$$\begin{aligned} H = \int \omega_k [|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2] dk + \frac{1}{2} \int [b_k^{+*} b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + b_k^{-*} b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^- b_{k_3}^-] T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ + 2\int b_k^{+*} b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned} \tag{12}$$

and

$$\frac{\partial b_k^+}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta b_k^{+*}} = 0, \quad \frac{\partial b_k^-}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta b_k^{-*}} = 0. \tag{13}$$

This system has two new integrals of motion, “number of waves” moving to the right and “number of waves” moving to the left. They are conserved separately. Indeed,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int |b^+|^2 \, dk = i\int [b_k^{+*} \omega_k b_k^+ - b_k^+ \omega_k b_k^{+*}] dk + \\ &+ i\int [b_k^{+*} b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ - b_k^+ b_{k_1}^+ b_{k_2}^{+*} b_{k_3}^{+*}] \times T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \\ &+ 2i\int [b_k^{+*} b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- - b_k^+ b_{k_1}^- b_{k_2}^{+*} b_{k_3}^{-*}] \times T_{kk_1}^{k_2k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 \equiv 0 \end{aligned}$$

due to symmetry condition (3)

$$N^+ = \int_0^\infty |b_k^+|^2 \, dk \qquad N^- = \int_{-\infty}^0 |b_k^-|^2 \, dk. \tag{14}$$

Obviously the total momentum

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} k[|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2]] dk$$

is also conserved.

It should be mentioned that system (11) can be drastically simplified by applying canonical transformation similar to that of (Dyachenko et.al., 2017, Dyachenko and Zakharov, 2011, Dyachenko and Zakharov, 2012). This canonical transformation will make possible to write down this system in super compact way, in *x*-space. This set of super compact equations will be presented in the separate article.

This work was supported by the state assignment “Dynamics of the complex materials”.

Keywords: water waves, integrals of motion, 1-D Zakharov equation

References

Dyachenko A.I., Kachulin D.I., and Zakharov V.E. Super compact equation for water waves. *Journal of Fluid Mechanic*, 2017, Vol. 828, pp. 661–679.

Dyachenko A.I. and Zakharov V.E. Is free-surface hydrodynamics an integrable system? *Phys. Lett. A*, 1994, Vol. 19, pp. 144–148.

Dyachenko A.I. and Zakharov V.E. Compact equation for gravity waves on deep water. *JETP Letters,* 2011, Vol. 93, No. 12, pp. 701–705.

Dyachenko A.I. and Zakharov V.E. A dynamic equation for water waves in one horizontal dimension. *European Journal of Mechanics – B/Fluids,* 2012, Vol. 32, pp. 17–21.

Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a depp fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 1968, Vol. 9, pp. 190–194.