УДК: 519.624 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).9

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ИМИТИРУЮЩИЕ ЗАДАЧУ КОШИ

Гордин В.А.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» & ФГБУ «Гидрометцентр России»,e-mail: vagordin@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

Компактные разностные схемы хорошо известны и демонстрируют высокий порядок точности для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть задано дифференциальное соотношение

$$Au = Bf \,, \tag{1}$$

где A, B – дифференциальные операторы по x, f – известная функция, u – неизвестная. Самый частый случай: $B = E$ – дифференциальные уравнения. Иногда нужно численно продифференцировать – тогда $A = E$. Общий случай можно разложить в комбинацию этих двух частных случаев, но в таком алгоритме погрешность увеличится.

Пусть задана сетка $\left\{x_j\right\}_{j=0}^{N}$. Аппроксимируем (1) парой разностных операторов:

$$Pu = Qf \,. \tag{2}$$

Функции здесь уже не на отрезке, а на сетке (сетках). Шаблоны для P, Q заданы. Даже в случае, когда B – единичный оператор, использование $Q \neq E$ позволяет существенно повысить порядок разностной схемы практически без увеличения вычислительных затрат. Главная идея: определить набор N пар т.н. тестовых решений уравнения (1): $\left\{\left\langle u_j, f_j \right\rangle\right\}_{j=1}^{N}$ и найти P, Q, такие что (2) на них выполнено. В граничных точках на выбор базиса тестовых решений влияют граничные условия. Этот подход позволяет избежать потери точности решения краевой задачи из-за неточной аппроксимации граничных условий.

Разработаны алгоритмы построения компактных схем 4-го порядка для краевых задач с переменным (гладким и со скачком) коэффициентом. Для уравнений диффузии с гладким переменным коэффициентом и уравнения Левина-Леонтовича также построены разностные схемы и экспериментально подтвержден их 4-й порядок. Метод построения компактных схем 4-го порядка можно обобщить на уравнения и системы в частных производных со слабой нелинейностью, например, на уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, нелинейное уравнение Шредингера или на систему Фитцхью – Нагумо. Для нелинейных задач используется комбинация простых явных схем и релаксации. Экстраполяция Ричардсона позволяет повысить порядок схем до 6-го.

Для аппроксимации многомерных задач с разрывными коэффициентами, например, двумерного стационарного уравнения диффузии в разнородных средах необходимо оценить возможные асимптотики решений в окрестности изломов линии границы. Для этого используются обобщенные собственные функции в угле, каковые можно использовать в качестве набора тестовых функций в (1,2) и строить компактные разностные схемы, аппроксимирующие задачу на треугольных сетках с высоким порядком точности. Асимптотики по радиусу обобщенных собственных функций (в полярных координатах в окрестности вершины угла) имеют иррациональные показатели, которые можно найти из специального дисперсионного уравнения и которые определяют индексы соответствующих функций Бесселя по радиусу.

Для ряда разностных схем, аппроксимирующих важнейшие эволюционные уравнения математической физики можно построить специальные граничные условия, имитирующие задачу Коши (ИЗК) на всей прямой. Эти условия ИЗК существенно зависят не только от исходного уравнения, но и от типа разностной схемы и даже от коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения. Условия ИЗК определяются с точностью до нормировки. Но при численной реализации выбор этой нормировки оказывается существен. Важна роль рациональных аппроксимаций типа Паде-Эрмита символа соответствующего псевдодифференциального оператора. Примеры movie решений задач с условиями ИЗК для разностных схем, аппроксимирующих основные уравнения мат. физики см. https://cs.hse.ru/mmsg/transbounds .

Работа была поддержана грантом № 18-05-0011 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2018–2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5–100».

Ключевые слова: компактная разностная схема, тестовые функции, порядок точности, экстраполяция Ричардсона, разрывный коэффициент диффузии, прозрачные граничные условия, имитирующие задачу Коши

Литература

Гордин В.А. О смешанной краевой задаче, имитирующей задачу Коши // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33(5). С. 181–182.

Гордин В.А. Применение проекторов в прогностических схемах // Труды Гидрометцентра СССР. 1978. № 212. С. 79–96.

Гордин В.А. Граничное условие полного поглощения волн, выходящих из прогностической области для дифференциального уравнения в частных производных // Труды Гидрометцентра СССР. 1982. № 242. С. 104–120.

Гордин В.А. Применение векторной аппроксимации Паде для численного решения эволюционных прогностических уравнений // Метеорология и гидрология. 1982. № 11. С. 24–37.

Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Вычислительные аспекты. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1987. 264 с.

Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012–2013. 733 с.

Гордин В.А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать. М.: Изд. дом ВШЭ, 2016. 530 с.

Гордин В.А., Цымбалов Е.А. Разностная схема 4-го порядка точности для дифференциального уравнения с переменными коэффициентами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 7. С. 13–14.

Гордин В.А., Цымбалов Е.А. Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 12. С. 16–28.

Gordin V.A., Tsymbalov E.A. Compact difference schemes for the diffusion and Schrodinger equations. Approximation, stability, convergence, effectiveness, monotony // Journal of Computational Mathematics. 2014. Vol. 32. No. 3. P. 348–370. http://www.global-sci.org/jcm/galley/JCMCR-14.pdf.

Gordin V.A., Tsymbalov E.A. Compact difference schemes for weakly-nonlinear parabolic and Schrodinger-type equations and systems // arXiv preprint arXiv. 2017. 1712.05185.

Gordin V.A., Tsymbalov E.A. Compact difference scheme for parabolic and Schrodinger-type equations with variable coefficients // J. Comp. Phys. 2018. Vol. 375. P. 1451–1468.

Gordin V.A., Shemendyuk A.A. Transparent Boundary Conditions for the Equation of Rod Transverse Vibrations // Submitted to Journal of Sound and Vibration. 2018. https://arxiv.org/submit/2447606/view .

COMPACT FINITE-DIFFERENCE SCHEMES FOR WEAKLY NON-LINEAR PROBLEMS AND BOUNDARY CONDITIONS IMITATING CAUCHY PROBLEM

Gordin V.A.

National Research University «Higher School of Economics» & Hydrometeorological Centre of Russia, e-mail: vagordin@mail.ru

Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

Compact finite-difference schemes are well known and provide high accuracy order for differential equation with constant coefficients.

Let us consider a differential relation

$$Au = Bf\ , \tag{1}$$

where *A, B* are differential operators with respect to variable *x*, *f* is a known function, *u* –is an unknown function. The most frequent case: *B*=*E* includes boundary problems for differential equations. Sometimes it is necessary to differentiate the function *f* numerically, then *A* = *E*. The general case can be decomposed into a combination of these two special cases, but in such two-step algorithm the error will be higher.

Let a grid $\left\{x_j\right\}_{j=0}^{N}$ is given. We approximate Eq. (1) by a pair of finite-difference operators:

$$Pu = Qf\ . \qquad (2)$$

We consider here the equation and functions on the grid (grids) only. Also stencils for operators *P, Q* are given. Even in the case where $B = E$, the use version $Q \neq E$ can significantly improve the order of the finite-difference scheme almost without increasing the computational cost. The main idea: to determine a set of *N* pairs of so-called test solutions of the equation (1): $\left\{\left\langle u_j, f_j\right\rangle\right\}_{j=1}^{N}$ and to determine finite-difference operators *P, Q,* such that Eq.~(2) is fulfilled for them. In the nodes near a boundary the choice of the basis of test solutions is influenced by specific boundary conditions. This approach avoids the loss of accuracy of the solution of the boundary value problem due to inaccurate approximation of the boundary conditions.

Algorithms for constructing compact schemes of the 4-th order for boundary value problems with variable (smooth or jump) coefficient are developed. For the diffusion equations with a smooth variable coefficient and the Levin – Leontovich equation, compact finite-difference schemes are also constructed and their 4-th order is experimentally confirmed. The method of constructing compact schemes of the 4-th order can be generalized to partial differential equations and systems with weak nonlinearity, for example, for the Fisher – Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation, for the nonlinear Schrödinger equation or for the Fitzhugh – Nagumo system. For such nonlinear problems, a combination of simple explicit schemes and relaxation is used. Richardson's extrapolation increases the order of the circuits to the 6-th.

To approximate multidimensional problems with discontinuous coefficients, for example, the two-dimensional stationary diffusion equation in inhomogeneous media, it is necessary to estimate the possible asymptotics of solutions in the vicinity of the boundary line's breaks. To do this, we use generalized eigen-functions in the angle, which can be used as a set of test functions in (1,2) and build compact difference schemes approximating the problem on triangular grids with high order of accuracy. The asymptotics along the radius of these generalized eigen-functions (in polar coordinates in the vicinity of the vertex of the angle) have irrational indices which can be found from a special dispersion equation and which determine the indices of the corresponding Bessel functions along the radius.

For a number of difference schemes approximating the most important evolutionary equations of mathematical physics, it is possible to construct special boundary conditions imitating the Cauchy problem (ICP) on the whole space. These conditions depend not only on the original equation, but also on the type of the difference scheme, and even on the coefficients of the corresponding differential equation. The ICP conditions are determined with accuracy to a gauge. But the choice of this gauge turns out to be essential with numerical implementation. The role of rational approximations of the Pade – Hermite type of the symbol of the corresponding pseudo-differential operator is important. Examples of movie solutions of problems with ICP conditions for various finite-difference schemes approximating the basic mathematical physics equations, see https://cs.hse.ru/mmsg/transbounds.

The study was realized within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University – Higher School of Economics (HSE) in 2016–2017 (grant No. 16-05-0069) and by the Russian Academic Excellence Project «5–100».

Keywords: compact finite-difference scheme, test functions, accuracy order, Richardson extrapolation, discontinuous diffusion coefficient, transparent boundary conditions imitating cauchy problem

References

Gordin V.A. O smeshannoj kraevoj zadache, imitiruyushchej zadachu Koshi. *Uspekhi matem. nauk. (On Mixed Boundary Problem, Simulated Cauchy Problem. Advances of Mathematical Sciences),* 1978, Vol. 33, No. 5, pp. 181–182 (Russian), pp. 189–190 (English).

Gordin V.A. Primenenie proektorov v prognosticheskih skhemah. *Trudy Gidrometcentra SSSR (Projectors Using in Forecasting Schemes. Proceedings of the USSR Hydrometeorological Center),* 1978, No. 212, pp. 79–96.

Gordin V.A. Granichnoe uslovie polnogo pogloshcheniya voln, vyhodyashchih iz prognosticheskoj oblasti dlya differencial'nogo uravneniya v chastnyh proizvodnyh. *Trudy Gidrometcentra SSSR (Boundary Condition of Waves Full Absorption, which Go Away from Prognostic Area for Difference Equation in Partial Derivatives. Proceedings of the USSR Hydrometeorological Center),* 1982, No. 242, pp. 104–120.

Gordin V.A. Primenenie vektornoj approksimacii Pade dlya chislennogo resheniya ehvolyucionnyh prognosticheskih uravnenij. (Application of the Pade Vectorial-Approximation to the Numerical Solution of Evolutionary Forecasting Equations). *Meteorology and Hydrology,* 1982, No. 11, pp. 24–37 (Russian), pp.18–27 (English).

Gordin V.A. Matematicheskie zadachi gidrodinamicheskogo prognoza pogody. Vychislitel'nye aspekty (Mathematical Problems of the Hydrodynamical Weather Forecasting. Numerical Aspects), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1987, 264 p.

Gordin V.A. Matematika, komp'yuter, prognoz pogody i drugie scenarii matematicheskoj fiziki *(*Mathematics, Computer, Weather Forecasting and Other Scenarios of Mathematical Physics), Moskva: Physmatlit, 2010, 2013 (in Russian).

Gordin V.A. and Tsymbalov E.A. Compact difference schemes for the diffusion and Schrodinger equations. Approximation, stability, convergence, effectiveness, monotony. *Journal of Computational Mathematics*, 2014, Vol. 32, No. 3, pp. 348–370, http://www.global-sci.org/jcm/galley/JCMCR-14.pdf.

Gordin V.A. Differencial'nye i raznostnye uravneniya. Kakie yavleniya oni opisyvayut i kak ih reshat (Differential and Finite-Difference Equations. What are Differential and Finite-Difference Equations. What are Phenomena That They Described and How They are Solved), Publisher Moscow: House of Higher School of Economics, 2016.

Gordin V.A. and Tsymbalov E.A. Raznostnaya skhema 4-go poryadka tochnosti dlya differencial'nogo uravneniya s peremennymi koehfficientami (4-th order difference scheme for differential equation with variable coefficients). *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, Vol. 10, No. 1, pp. 3–14, (English).

Gordin V.A. and Tsymbalov E.A. Kompaktnaya raznostnaya skhema dlya differencial'nogo uravneniya s kusochno-postoyannym koehfficientom (Compact difference scheme for a differential equation with a piecewise constant coefficient). *Matematicheskoe modelirovanie*, 2017, Vol. 29, No. 12, pp. 16–28.

Gordin V.A. and Tsymbalov E.A. Compact difference schemes for weakly-nonlinear parabolic and Schrodinger-type equations and systems. 2017, arXiv preprint arXiv, 1712.05185.

Gordin V.A. and Tsymbalov E.A. Compact difference scheme for parabolic and Schrodinger-type equations with variable coefficients. *J. Comp. Phys.*, 2018, Vol. 375, pp. 1451–1468.

Gordin V.A. and Shemendyuk A.A. «Transparent» Boundary Conditions for the Equation of Rod Transverse Vibrations. Preprint https://arxiv.org/submit/2447606/view 2018, submitted to Journal of Sound and Vibration.