© Алексеева Е.С., Рассадин А.Э., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 12–14

УДК 517.95 DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).2

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ МОДУЛЯЦИИ УИЗЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА С ПРОСТЕЙШИМ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.

Нижегородское математическое общество, Нижний Новгород, 603950, Россия
e-mail: kometarella@mail.ru, brat_ras@list.ru
Статья поступила в редакцию 25.12.2018, одобрена к печати 30.01.2019

Как хорошо известно, приближенное решение нелинейного уравнения Клейна-Гордона-Фока (УКГФ) может быть построено с помощью теории модуляции Уизема (Уизем, 1977). В данной работе в рамках модификации теории Уизема, представленной в (Алексеева, Рассадин, 2018) и (Костромина и др., 2017), для УКГФ с потенциалом $U(x) = (x–1/x)^2$ найдено его асимптотическое решение $v\ (x,\ t)$. Благодаря тому, что одномерное движение классической частицы единичной массы в этом потенциале изохронно, амплитуда $a\ (x,\ t)$ асимптотического решения подчиняется линейному уравнению переноса $\partial a/\partial t + V\partial a/\partial x = 0$ со скоростью V, лежащей в интервале $–1<V<1$. Характерной особенностью построенного решения является отсутствие у него градиентной катастрофы, поэтому оно удобно для исследования следующих членов асимптотического разложения решения УКГФ с рассматриваемым потенциалом (Маслов, Омельянов, 1981). Произведение Уизем-аналогов групповой и фазовой скоростей волны у построенного асимптотического решения УКГФ равно единице – как и у линейного УКГФ.

В предположении о том, что начальная фаза асимптотического решения УКГФ является случайной величиной с устойчивым распределением вероятностей, вычислен его средний квадрат $<v^2(x,\ t)>$.

Полученное асимптотическое решение благодаря его простоте и содержательности можно использовать в учебном процессе для иллюстрации возможностей теории модуляции Уизема.

Ключевые слова: бегущая волна, фазовая плоскость, переменные действие-угол, система уравнений модуляции, градиентная катастрофа, уравнение переноса, характеристическая функция устойчивого распределения

Литература

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Асимптотический анализ уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: VIII Международная

научная молодежная школа-семинар (Саранск, 16–20 июля 2018 г.). Саранск: СВМО, 2018. С. 12–15.

Костромина О.С., Потапов А.А., Ракуть И.В., Рассадин А.Э. Колебания в однородной цепочке с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной ёмкостью // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2017. №. 6. С. 1760703.

Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Вып. 3(219). С. 63–126.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир. 1977. 624 с.

THE MODIFIED WHITHAM MODULATION THEORY FOR THE NONLINEAR KLEIN-GORDON-FOCK EQUATION WITH THE SIMPLEST RATIONAL FUNCTION AS ITS POTENTIAL

Alekseeva E.S., Rassadin A.E.

Nizhny Novgorod Mathematical Society, Nizhny Novgorod, 603950, Russia
e-mail: kometarella@mail.ru, brat_ras@list.ru
Submitted 25.12.2018, accepted 30.01.2019

It is well-known that one can construct approximate solution of the nonlinear Klein-Gordon-Fock equation (NKGF) by means of the Whitham modulation theory (Whitham, 1977). In this work in the framework of the modified Whitham modulation theory presented at (Alekseeva, Rassadin, 2018) and (Kostromina et al., 2017) for NKGF with potential $U(x) = (x–1/x)^2$ its asymptotic solution $v(x, t)$ has been found. Due to isochronism of one-dimensional movement of classical particle with unit mass in this potential amplitude $a(x, t)$ of asymptotical solution obeys the linear transfer equation $\partial a/\partial t + V\partial a/\partial x = 0$ with velocity V belonging to the interval $–1<V<1$. Peculiarity of the constructed solution is absence of gradient catastrophe therefore it is convenient for investigation of the next terms of asymptotic expansion of the NKGF solution with considered potential (Maslov, Omel'yanov, 1981). Product of Whitham-analogs of group and phase velocities of wave from constructed asymptotic solution of NKGF is equal to unit. This is the same value as for the linear Klein-Gordon-Fock equation.

The mean square $<v^2(x, t)>$ of asymptotic solution of NKGF has been calculated under assumption that its initial phase shift is random value with stable distribution of probabilities.

The obtained asymptotic solution due to its simplicity and informativity can be used by lecturers to illustrate abilities of the Whitham modulation theory.

Keywords: travelling wave, phase plane, the action-angle variables, the Whitham modulation equations, the gradient catastrophe, transfer equation, characteristic function of stable distribution

References

Alekseeva E.S. and Rassadin A.E. Asimptoticheskii analiz uravnenii Kleina-Gordona-Foka s chisto kubicheskoi nelineinost'yu (Asimptotic analysis of Klein-Gordon-Fock equations with purely cubic nonlinearity), Vos'maya Mezhdunarodnaya nauchnaya molodezhnaya shkola-seminar Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm imeni E.V. Voskresenskogo (The 8th International Scientific Yourth WorkShop "Mathematical Modelling, Numerical Methods and Program Complexes, named after E.V. Voskresenskii"), Saransk, 16–20 June, 2018, Book of Abstracts.

Kostromina O.S., Potapov A.A., Rakut' I.V., and Rassadin A.E. Kolebaniya v odnorodnoi tsepochke s segnetoelektricheskimi kondensatorami s otritsatel'noi emkost'yu (Oscillations in homogeneous circuit with ferroelectric capacitors with a negative capacitance). *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta*, 2017, No. 6, p. 1760703.

Maslov V.P. and Omel'yanov G.A. Asimptoticheskie solitonoobraznye resheniya uravnenii s maloi dispersiei (Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion). *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1981, Vol. 36, No. 3(219), pp. 63–126.

Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. Wiley, New York, 1974, 636 p.