

К ТЕОРИИ СПЕКТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

В.П. Кузнецов¹

¹*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Москва,
Нахимовский проспект, д. 36, e-mail: vladkuz@ocean.ru*

Статья поступила в редакцию 21.11.2017, одобрена к печати 25.12.2017

В работе излагается метод спектральных решений эволюционных уравнений нелинейной акустики для сред с диссипацией. Приведены графики спектральных амплитуд и полевые формы волны, полученные суммированием большого числа гармоник для различных сред и параметров нелинейности.

Ключевые слова: нелинейность, волна, диссипация, число Рейнольдса

При описании и решении задач нелинейных волновых процессов можно использовать полевые или спектральные методы, выбор которых диктуется как целями исследования, так и свойствами среды. Считается (Гурбатов, Руденко и др., 2008), что спектральный метод эффективен лишь для сред с дисперсией при взаимодействии ограниченного числа гармоник, и поэтому при описании нелинейных волн в средах со слабой и сильной частотной дисперсией используются различные подходы (Гурбатов, Руденко, и др., 2008; Кузнецов, 2013, 2010).

Однако развитие спектральных методов позволяет сблизить возможности этих двух подходов. Формулы спектральных решений открывают возможность современными методами простых компьютерных программ суммирования большого числа гармоник, воспроизводить форму волны в любых средах и наблюдать эволюционную динамику нелинейной волны. В данной работе в развитие идей ранних работ (Кузнецов, 2013, 2010, 1970, 2013, 2011, 2009; Красильников, Кузнецов, 1974) предлагаются новый метод спектральных решений ряда эволюционных уравнений нелинейной акустики для сред с диссипацией. Заметим, что предлагаемый здесь метод может применяться и для сред с дисперсией и дифракцией при более сложном анализе комплексных величин в таких средах.

Рассмотрим класс квадратично-нелинейных эволюционных уравнений, которые могут быть решены в спектральном виде. В наиболее общем случае их можно представить в безразмерной форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial \tau} = A_0 u + \sum_{n=1}^4 A_n \frac{\partial^n u}{\partial \tau^n} + \hat{M} \int u d\tau \equiv \hat{L}u. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения: \hat{L} - линейные операторы, не зависящие от x , например, дифференцирование и интегрирование по τ, y ; $u(\tau, x, y, z)$ - функция, описывающая некоторую характеристику волны, например плотность, давление или потенциал скорости, нормированная на амплитуду источника сигнала. Все переменные и коэффициенты безразмерные здесь и далее во всех уравнениях.

В уравнении (1) A_0 - коэффициент внешнего трения, создающегося при трении колеблющейся среды о неподвижную границу. К этому случаю относится действие стенок на волну в жидкости, заполняющий узкий капилляр, а также распространение звука в пористых материалах и в средах с релаксацией (Исакович, 1973; Хохлов, 1961; Руденко, Солуян, и др., 1974). Заметим, что при внешнем трении коэффициент затухания не зависит от частоты, т.е. волна любого вида распространяется в линейной среде без изменения формы. Коэффициенты A_n описывают диссипативные и дисперсионные процессы и относятся к уравнениям Бюргерса и Кортевега-де-Вриза (КдВ), помимо члена четвертого порядка, который описывает эффекты рассеяния волны на мелкомасштабных неоднородностях. Действительно коэффициент ослабления волны в неоднородной среде можно представить в виде $\delta \approx k^2 a [1 - \exp(-k^2 a^2)]$ (Кузнецов, 2010; Чернов, 1975), где k, a - волновое число и масштаб неоднородностей. В случае мелкомасштабных неоднородностей получается релеевская зависимость - коэффициент рассеяния четвертой степени частоты. Для крупномасштабных флуктуаций коэффициент рассеяния растет пропорционально квадрату частоты, подобно коэффициенту вязкого трения. Таким образом, коэффициенты A_2 и A_4 могут учитывать также и эффекты ослабления волны за счет рассеяния. A_2 - по сути обратное акустическое число Рейнольдса - отношение характерных «нелинейной» и «диссипативной» длин. Затем определим оператор \hat{M} . В самом простом случае (простом в смысле написания) это может быть постоянный коэффициент низкочастотной дисперсии в среде с резонансной кавитацией, а также в задачах с дифрагирующими пучками. Такое уравнение было получено и решено приближенно в спектральном виде, а также отображена форма волны суммой 50-ти гармоник в работе (Красильников, Кузнецов, 1974). Наиболее

важным случаем является включение в оператор \hat{M} поперечного лапласиана Δ_{\perp} , приводящего к уравнению Хохлова-Заболотской (ХЗ). И наконец, для неоднородной среды к оператору \hat{L} можно добавить член с первой производной по времени и коэффициентом, зависящим от термодинамических неоднородностей среды (скорости звука) и компоненты скорости вихревого течения по направлению распространения звуковой волны (Кузнецов, 2010, 2009; Воронин, Кузнецов, и др., 2007).

Основой данного метода является возможность получения решения уравнения простой волны (ПВ) для идеальной среды в неявном виде $u(x, \tau) = f(\tau - xu^k)$ или в спектральном виде для квадратичной и кубичной нелинейности, вычисляя временной спектр Фурье неявной функции соответственно (Кузнецов, 2013, 2010, 1970; Пелиновский, 1976)

$$u(\omega, x) = \frac{1}{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp[i\omega x u(\tau, 0)] - 1\} \exp(-i\omega \tau) d\tau, \quad (2)$$

$$u(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} du(\tau, 0) \exp[i\omega x u^2(\tau, 0)] \exp(-i\omega \tau), \quad (3)$$

где функция $u(\tau, 0)$ определяется граничным условием. Заметим, что последние две формулы получены с использованием альтернативного метода разложения искомой функции в бесконечный ряд Тейлора по координате и затем полным суммированием его не применяя решения в неявном виде, как было получено в работе (Пелиновский, 1976), в которой рассмотрены свойства и эволюционные изменения различных форм и видов спектров простых волн в сложной нелинейной среде.

Ограничительной особенностью решений (ПВ) для идеальной среды является неоднозначность при $|xf'| \geq 1$. Физически, в точках неоднозначности в волне образуются ударные волны. Математически первые производные по x и τ при этом условии обращаются в бесконечность $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uf'}{1 - xf'}$, где $u(0, \tau) = f(\tau)$ – профиль волны в источнике, f' – производная. Для граничного условия в виде гармонического источника, образование ударной волны будет происходить при $x \geq 1$, т.к. $|f| \leq 1$, а x – действительное число $0 \leq x < \infty$. Заметим, что при отсутствии диссипации и дисперсии расстояние x определяется только величиной нелинейности, в другом же случае, характеристики среды вязкость и др. введут свои ограничения на рост x .

Теперь перейдем к построению конкретных решений. Вначале рассмотрим задачи для сред с диссипацией. Такие задачи описываются следующим уравнением с тремя видами поглощения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial \tau} = A_0 u + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + A_4 \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4}, \quad (4)$$

где: коэффициенты A_n – безразмерные величины отношения характерной нелинейной длины к диссипативным, их знаки выбираются так чтобы волна затухала. В спектральном виде эти коэффициенты можно объединить и записать в виде: $A(n) = A_0 - A_2 n^2 + A_4 n^4$, где $n = \omega / \omega_0$ для периодической функции, $A(n)$ – действительная величина в случае с затуханием (в общем случае с дисперсией она будет комплексной).

Будем искать решение уравнения (4) в следующем виде $u(x, \tau) = \exp(ax)p(x, \tau)$ с условием при $x = 0$, $p(0, \tau) = \sin \omega_0 \tau$, ограничиваясь для простоты монохроматическим возмущением. Подставляя в (4) и преобразуя, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} + e^{ax} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = -ap + A_0 p + A_2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + A_4 \frac{\partial^4 p}{\partial \tau^4} \quad (5)$$

Будем искать частное решение при котором правая и левая часть уравнения (5) равняются нулю. Рассмотрим два следующих полученных таким образом уравнения. Первое нелинейное $\frac{\partial p}{\partial x} + e^{ax} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ с заменой пространственной координаты $x \rightarrow s(x) = \int e^{-ax} dx$ сводится к уравнению простой волны, решением которого является неявная функция $p(s, \tau) = f(\tau + sp)$ или в нашем частном случае $p(s, \tau) = \sin \omega_0(\tau + sp)$. Далее рассмотрим второе уравнение $-ap + A_0 p + A_2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + A_4 \frac{\partial^4 p}{\partial \tau^4} = 0$, которое легко решается спектральным методом. Спектр простой волны и его производные для гармонического источника известны (Кузнецов, 2013, 2010, 1970; Пелиновский, 1976) и это уравнение переходит в алгебраическое $(A_0 - A_2 n^2 + A_4 n^4 - a)P(s, n) = 0$ или в общем случае $[a + A(n)]P(s, n) = 0$, где $P(s, n)$ спектр (ПВ), условие $a + A(n) = 0$ является вторым обязательным для разделения уравнения (5).

Принимая $a = -A(n)$, получим $\exp[-A(n)x]$ и новое уравнение (ПВ) $\frac{\partial p}{\partial s} + p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ для функции $p(s, \tau)$ с заменой пространственной координаты $x \rightarrow s(x, n) = \int \exp[-A(n)x] dx$ или с учетом граничного условия

$s(x, n) = \{1 - \exp[-A(n)x]\} / A(n)$. Таким образом, если $P(s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ спектр функции $p(s, \tau)$, то и функция $u(x, \tau)$ и её спектр $U(x, \omega)$ будут определяться

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(s, \omega) e^{-A(\omega)x + i\omega\tau} d\omega, \quad \text{или}$$

применяя свойство свертки получаем решение поставленной задачи в виде:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, t) G(\tau - t) dt, \quad \text{где } G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(\omega)x - i\omega t} d\omega. \quad (7)$$

И окончательно, безразмерный спектр нелинейной периодической волны в диссипативной среде может быть представлен в следующем виде для амплитуды гармоник

$$B_n(x) = \frac{\exp[-A(n)x]}{ins(x)} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(ins \sin \tau) - 1] \exp(-in\tau) d\tau, \quad ,$$

или в форме ряда Фурье

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-A(n)x] \frac{J_n(ns)}{ns} \sin(n\omega_0\tau), \quad (8)$$

где $s(x) = [1 - \exp(-A(n)x)] / A(n)$ $A(n) = A_0 + A_2 n^2 + A_4 n^4$, $n = \omega / \omega_0$, $J_n(ns)$ – функция Бесселя 1-го рода.

Обобщая выше изложенный вывод можно отметить, что влияние диссипации для нелинейных волн приводит помимо линейного эффекта ослабления амплитуды каждой гармоники с различными коэффициентами к созданию новой приведенной координаты также для каждой гармоники, величина которой определяется функцией $s(x, n)$.

Проанализируем полученное решение. Очевидно, что при $A(n)x \rightarrow 0$, $s(x) \rightarrow x$, и получаем спектр Бесселя-Фубини для идеальной среды, а при больших значениях $A(n)x \rightarrow \infty$, $s(x) \rightarrow 1 / A(n)$ отсутствует зависимость от x , т.е. $s(x)$ стремится к постоянному значению, которое для уравнения Бюргера является акустическим числом Рейнольдса $R = 1 / A_2$.

Заметим, что нахождение значения функции $s(x)$ для всех эволюционных уравнений (1), является центральным звеном получения спектральных решений нелинейной задачи, т.к. функция $\exp[-A(n)x]$ есть просто спектральное решение линейного уравнения, а спектр (ПВ) давно известен. Впервые такая функция $s(x)$ была получена Р.В. Хохловым для уравнения с коэффициентом «внешнего» трения не зависящем от частоты (Хохлов, 1961) и была им названа «безразмерным приведенным расстоянием»; мы будем придерживаться этого названия.

Далее перейдем к задачам для сред с разным типом затухания. Самая простая задача это распространение нелинейной волны в среде с частотно-

независимым поглощением или "внешнего" трения (Кузнецов, 2013, 2011, 2009, 2015). В этом случае $s(x) = (1 - e^{-A_0 x}) / A_0$ определим расстояние образования разрыва $s[x'(R_0)] = 1$ для этого случая $x'(R_0) = -R_0 \ln(1 - 1/R_0)$, где $R_0 = 1/A_0$. В дальнейшем индексы опустим, поскольку все коэффициенты по сути числа Рейнольдса только для разных характерных типов затухания. Влияние вязких сил приводит к тому, что при $R \leq 1$ $x' \rightarrow \infty$ т.е. разрыв вообще не образуется, а при $R \geq 1$ разрыв образуется не взирая на вязкость и $x' \rightarrow 1$. Амплитуды гармоник зависят от расстояния x и от процесса конкуренции нелинейного роста гармоник и вязкого уничтожения их, т.е. от числа R

$$B_n(x, R) = 2 \exp(-x/R) \frac{J_n(ns)}{ns}, \quad s(x) = R[1 - \exp(-x/R)], \quad s(x) \leq 1.$$

Перейдем к другому процессу затухания – частотно-зависимому и будем анализировать спектральную картину для уравнения Бюргера. В этом случае задача несколько усложняется – поглощение волны и приведенное расстояние теперь зависят от частоты и конкуренция процессов нелинейности и затухания определяются величиной R/n^2 в соответствии с полученным приведенным расстоянием $s(x)$

$$B_n(x, R) = 2 \exp(-n^2 x/R) \frac{J_n(ns)}{ns}, \quad s(x) = R[1 - \exp(-n^2 x/R)], \quad s(x) \leq 1. \quad (9)$$

Теперь граница x' образования разрыва зависит не только от числа Рейнольдса $R = 1/A_2$ но и различна для разных гармоник n $x' = -R \ln(1 - n^2/R) / n^2$. Разрыв при $(n^2/R) \geq 1$ не образуется, но достаточно условия $R \leq 1$, чтобы при любом целом n^2 под логарифмом было отрицательное число и $x' \rightarrow \infty$, побеждает вязкость – опрокидывание волны не происходит нигде. В другом случае при $(n^2/R) \leq 1$ разрыв образуется на расстоянии x' , и мы приходим к новому результату – появляется ограничение на число гармоник формирующих профиль волны – $N_{\max} = \sqrt{R}$. Это явление означает, что при $R \gg 1$ спектр эффективно обрезается при возникновении ударной волны, определяя тем самым её безразмерную ширину $\Delta \sim w_0 / w_n \sim 1/\sqrt{R}$, или крутизну фронта, зависящую от соотношения нелинейных и диссипативных сил. Таким образом при $R \gg 1$ наблюдается физически понятный результат – побеждает нелинейность и $N_{\max} = \sqrt{R}$ можно интерпретировать как число степеней свободы нелинейной системы (Заславский, Сагдеев, 1988).

Далее, не трудно построить аналогичные решения для всех видов диссипации и не только её, т.к. общее решение (7) справедливо для всех отмеченных выше нелинейных эволюционных уравнений (1) поскольку их

линейное решение в спектральном виде не вызывает затруднений, а вычисление безразмерного приведенного расстояния $s(x)$ требует специального анализа для каждой задачи. Приведем графики спектральных амплитуд $B_n(x)$ (рис. 1) на расстояниях превышающих точку образования ударной волны и разные формы гармонической волны $u(x, \tau)$ (рис. 2), полученные последовательным суммированием $n + 2$ гармоник до 30-ти спектрального решения нелинейных уравнений (8) с различным типом поглощения на разных расстояниях от источника и уровнем конкуренции нелинейности и поглощения или обобщенных чисел Рейнольдса. Здесь хорошо прослеживается асимптотическое приближение к точному решению с увеличением числа просуммированных гармоник.

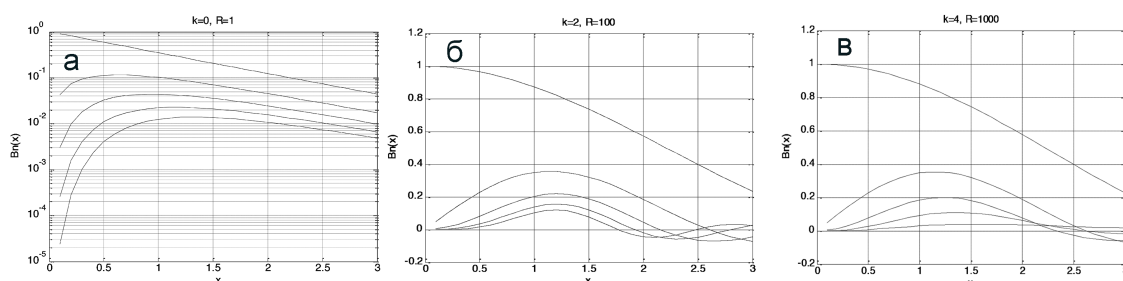


Рис. 1. Графики спектральных амплитуд 5-ти гармоник на расстояниях от источника $x = 0$ до 3 и чисел Рейнольдса 1, 100, 1000 для различных типов поглощения: внешнее трение – а, уравнение Бюргера – б и четвертая степень – в.

Сделаем некоторое замечание. Как видно на рис. 2. в области крутого фронта волны наблюдаются небольшие колебания, которые в некоторых работах, посвященных численному моделированию сильно искаженных нелинейных сигналов (Аверьянов, Басова и др., 2005) авторы принимают за одновременное физическое действие конкурирующих процессов акустической нелинейности и сглаживающей диссипации. В действительности это объясняется особым поведением частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва разлагаемой функции и хорошо известно в математике как явление Гиббса, что также наблюдается на графиках рис. 2 и является не физическим процессом, а чисто математической помехой. Это явление легко наблюдается простым суммированием ряда гармоник вида $\sin(nt) / n$.

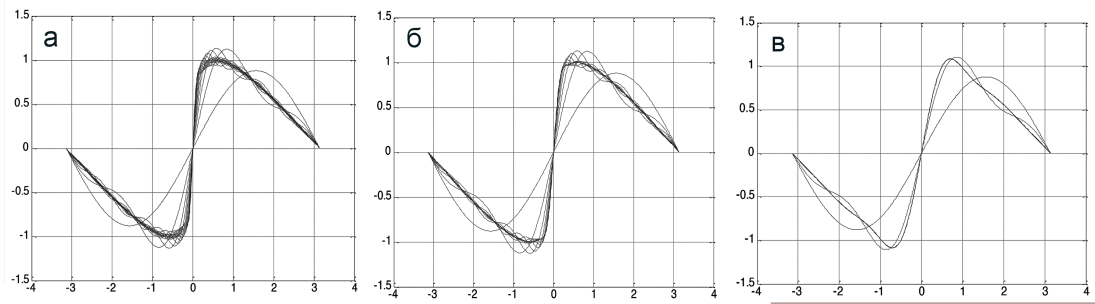


Рис. 2. Разные формы волны на расстоянии $x = 1.0$ и числа Рейнольдса $R = 1000$, полученные последовательным суммированием $n + 2$ гармоник от $n = 1$ до 30 спектрального решения нелинейных уравнений с различным типом поглощения: внешнее трение – а, квадратичная зависимость уравнение Бюргера – б и четвертая степень рассеяния – в.

Колебательные процессы в нелинейной волне возникают в средах с различной дисперсией скорости. В качестве примера колебательной эволюции нелинейной волны для уравнения Кортевега-де-Вриза на рис. 3 приведена форма гармонической волны в среде с дисперсией, полученная с помощью выше приведенного метода, однако из-за некоторых упрощений не претендующая на точное решение, но хорошо описывающая распространение нелинейной волны на ограниченных расстояниях от источника.

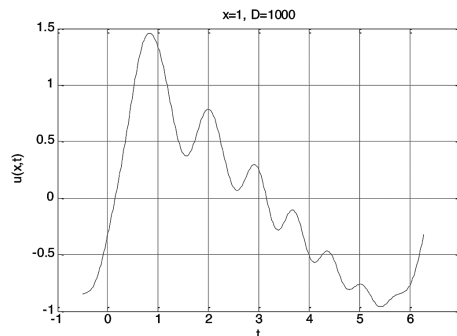


Рис. 3. Пример эволюции формы гармонической волны в среде с дисперсией (для уравнения КДВ) на расстоянии от источника $x = 1.0$ и отношения дисперсионной и нелинейной длин $D = 1000$ ($1/A_3$, аналогичное числу Рейнольдса) и модуля комплексного безразмерного расстояния

$$|s(x, n)| = 2 \left| \sin(n^3 A_3 x / 2) \right| / n^3 A_3 \leq 1.$$

В заключение получим точное решение для всего эволюционного интервала изменений x . Запишем неявное решение в параметрической форме: $p(s, \tau) = \sin(z)$, $\tau = z - s \sin(z)$. При $s \leq 1$ интервалу $0 \leq z \leq \pi$ соответствует интервал $0 \leq \tau \leq \pi$, а при $s \geq 1$ интервал изменений τ становится больше π . Для устранения неоднозначности нужно ограничить изменения z от z_0 до π , где z_0 есть точка пересечения кривой $z = f(\tau, s)$ с осью ординат или второй корень

уравнения $\tau = z - s \sin(z)$. Это условие соответствует условию равенства площадей, ограниченных волновой функцией, введенного Л.Д. Ландау. Теперь определим коэффициенты ряда Фурье разрывной функции $p(s, \tau)$ при $s \geq 1$

$$B_n(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(s, \tau) \sin(n\omega_0 \tau) d\tau, \text{ выполняя замену переменных в определенном}$$

интеграле и пределах интегрирования и дважды интегрируя по частям, получим выражения для амплитуд гармоник через неполные цилиндрические функции $J_n(ns, z_0)$ (Кузнецов, 2010, 1970).

$$B_n(s) = \frac{2}{n\pi s} \left[z_0 + \int_{z_0}^\pi \cos n(s \sin z - z) dz \right] = \frac{2}{n\pi s} [z_0 + \pi J_n(ns, z_0)] \quad (10)$$

Таким образом снимается вопрос о математическом разрыве и эволюцию нелинейной волны можно рассматривать в спектральной форме на всем интервале изменений расстояния или времени в зависимости от типа задачи. Анализ выражения (10) показывает, что при $s \gg 1$ $z_0 \rightarrow \pi$ и амплитуда гармоник $B_n \approx 2/ns$. На рис. 4 приведен график спектральных амплитуд 8-ми гармоник простой волны в среде без диссипации на расстояниях до 10-ти приведенных масштабов, вычисленных по формуле (10).

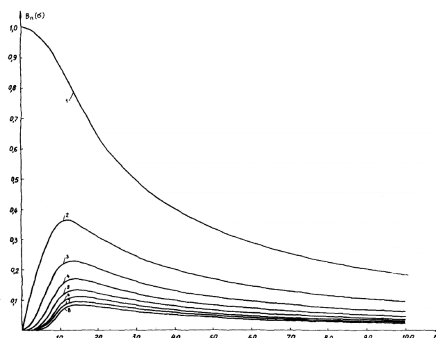


Рис. 4. График спектральных амплитуд 8-ми гармоник на всем интервале изменений пространства для простой волны Римана в недиссипативной среде, представленных через неполные цилиндрические функции по формуле (10) (Кузнецов, 2010).

Очевидно, что данное уточнение справедливо не только для простой волны Римана, но и для всех сред, где наблюдаются разрывные решения.

Литература

Аверьянов М.В., Басова М.С., Хохлова В.А. Стационарные и квазистационарные волны в диссипативных системах четного порядка // Акуст. журн. 2005. Т. 51. №5. С. 581–588.

В.П. Кузнецов

- Воронин В.А., Кузнецов В.П., Мордвинов Б.Г., Тарасов С.П., Тимошенко В.И. Нелинейные и параметрические процессы в акустике океана. Ростов-на-Дону: Ростиздат, 2007. 448 с.
- Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
- Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука. ГРФМЛ, 1988. 368 с.
- Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
- Красильников В.А., Кузнецов В.П. Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации. // Акуст. журн. 1974. Т. 20. С. 473–477.
- Кузнецов В.П. Нелинейная акустика в океанологии // Акустика океана. Сб. трудов школы-семинара акад. Л.М. Бреховских. – М.: ГЕОС, 2009. С. 280–283.
- Кузнецов В.П. Нелинейная акустика в океанологии. М.: Физматлит, 2010. 263 с.
- Кузнецов В.П. методах решения уравнений нелинейной акустики. Сб. трудов XXIV сессии РАО. – Саратов, 2011. Т. 1. С. 107–112.
- Кузнецов В.П. О спектральных методах решения уравнений нелинейной акустики. // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 322–326.
- Кузнецов В.П. О спектрах интенсивных шумов. // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 1. С. 155–156.
- Кузнецов В.П. Спектры нелинейных волн в диссипативных средах // Акустика океана. Сб. трудов школы-семинара акад. Л.М. Бреховских. – М.: ГЕОС, 2013. С. 199–202.
- Кузнецов В.П. Спектры нелинейных волн в диссипативных средах. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015 года. С. 2137–2139.
- Пелиновский Е.Н. Спектральный анализ простых волн. Изв. ВУЗ Радиофизика. 1976. Т. 19. № 3. С. 373–383.
- Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. С. 449–457.
- Хохлов Р.В. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 6. С. 917–925.
- Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1975. 172 с.

TO THE THEORY OF SPECTRA OF NONLINEAR WAVES IN DISSIPATIVE MEDIA

V.P. Kuznetsov¹

¹*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36, Nakhimovskiyi prospect, Moscow, 117997, Russia, e-mail: vladkuz@ocean.ru*

Submitted 21.11.2017, accepted 25.12.2017

In this paper present a spectral method for solutions of evolution equations of nonlinear acoustics for environments with dissipation. Graphs of the spectral amplitudes and the field waveform obtained by the summation of a large number of harmonics for various environments and parameters of nonlinearity are given.

Keywords: non-linearity, wave, dissipation, Reynolds number

References

- Averiyanov M.V., Basova M.S., Khokhlova V.A.*, Stationary and quasi-stationary waves in even-order dissipative systems, *Acoustical Physics*, 2005, Vol. 51, No. 5, pp. 495–501.
- Chernov L.A.*, Volny v sluchajno-neodnorodnyh sredah, Moskva: Nauka, 1975, 172 p.
- Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I.*, Volny i struktury v nelinejnyh sredah bez dispersii, Prilozhenija k nelinejnoj akustike, Moskva: Fizmatlit, 2008, 496 p.
- Hohlov R.V.*, K teorii udarnyh radiovoln v nelinejnyh linijah, *Radiotekhnika i jelektronika*, 1961, Vol. 6, No. 6, pp. 917–925.
- Isakovich M.A.*, Obshhaja akustika, Moskva: Nauka, 1973, 495 p.
- Krasil'nikov V.A., Kuznetsov V.P.*, Rasprostranenie nelinejnyh zvukovyh voln v zhidkosti pri kavitacii, *Akust. zhurn.*, 1974, Vol. 20, pp. 473–477.
- Kuznetsov V.P.*, Nelinejnaja akustika v okeanologii, Akustika okeana, Sb. trudov shkoly-seminara akad. L.M. Brehovskih, Moskva: GEOS, 2009, p. 280–283.
- Kuznetsov V.P.*, Nelinejnaja akustika v okeanologii, Moskva: Fizmatlit, 2010, 263 p.
- Kuznetsov V.P.*, O metodah reshenija uravnenij nelinejnoj akustiki, Sb. trudov XXIV sessii RAO, Saratov, 2011, Vol. 1, p. 107–112.
- Kuznetsov V.P.*, O spektrah intensivnyh шумов, *Akust. zhurn.*, 1970, Vol. 16, No. 1, pp. 155–156.
- Kuznetsov V.P.*, On Spectral Methods for Solving Nonlinear Acoustics Equations, *Acoustical Physics*, 2013, Vol. 59, No. 3, pp. 281–285.
- Kuznetsov V.P.*, Spektry nelinejnyh voln v dissipativnyh sredah, Akustika okeana, Sb. trudov shkoly-seminara akad. L.M. Brehovskih, Moskva: GEOS, 2013, pp. 199–202.
- Kuznetsov V.P.*, Spektry nelinejnyh voln v dissipativnyh sredah, XI Vserossijskij s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoj i prikladnoj mehaniki, Kazan', 20–24 avgusta 2015 goda, pp. 2137–2139.
- Pelinovskij E.N.*, Spektral'nyj analiz prostyh voln, *Izvestia VUZ Radiofizika*, 1976, Vol. 19, No. 3, pp. 373–383.
- Rudenko O.V., Solujan S.I., Hohlov R.V.*, Problemy teorii nelinejnoj akustiki, *Akust. zhurn.*, 1974, Vol. 20, No. 3, pp. 449–457.
- Voronin V.A., Kuznecov V.P., Mordvinov B.G., Tarasov S.P., Timoshenko V.I.*, Nelinejnye i parametricheskie processy v akustike okeana, Rostov-na-Donu: Rostizdat, 2007, 448 p.
- Zaslavskij G.M., Sagdeev R.Z.*, Vvedenie v nelinejnuju fiziku: Ot majatnika do turbulentnosti i haosa, Moskva: Nauka, GRFML, 1988, 368 p.