

ПРОБЛЕМА С БЕРЕГАМИ ПРИ АССИМИЛЯЦИИ ОКЕАНОГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Сонечкин Д.М.

*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
117997, Москва, Нахимовский проспект, д. 36, e-mail: dsonech@ocean.ru
Статья поступила в редакцию 10.10.2018, одобрена к печати 01.11.2018*

Рассматривается вопрос об усвоении данных наблюдений, необходимых для задания начальных условий при интегрировании моделей общей циркуляции океана. Указывается принципиальное отличие такого усвоения по сравнению с аналогичным усвоением данных о состоянии атмосферы. Оно проистекает из существенной пространственной неоднородности океанических процессов в прибрежных зонах и окрестностях основных океанических течений по сравнению с открытым океаном.

Ключевые слова: ассимиляция океанографических наблюдений, пространственная неоднородность океана, оптимальная интерполяция, калмановская фильтрация

Введение

Вопрос о необходимости объективного (численного) анализа (ОА) данных инструментальных наблюдений о состоянии системы атмосфера–океан возник в начале 2-й половины XX в. в связи с появлением первых численных схем краткосрочного прогноза погоды, основанных на решении задачи Коши для уравнений гидротермодинамики атмосферы. Начальные условия для этого должны были быть заданы на некоторой регулярной сетке точек, покрывающей область атмосферы, для которой решается задача Коши. Для определения таких начальных условий могли служить только наблюдения на нерегулярно расположенных наземных метеостанциях и станциях радиозондирования толщи атмосферы. Поэтому задача ОА сводилась тогда к интерполяции данных наблюдений со станций на узлы регулярной сетки. Интерполяция облегчалась тем, что рассматривавшиеся метеорологические поля в масштабах сотен километров по горизонтали можно было считать однородными и изотропными, если анализировать не сами поля, а их отклонения от полей климатических норм. Важно было также то, что ошибки разных наблюдений можно было считать некоррелированными с состоянием атмосферы и независимыми друг от друга.

В 1961 г. Л.С. Гандин (1963) сформулировал среднеквадратический критерий качества ОА метеорологических полей и на его основе разработал оптимальную, т.е. наилучшую с точки зрения этого критерия, интерполяцию (ОИ). Идея ОИ чрезвычайно проста. Она использует линейную множественную регрессию. Ко-

эффициентами регрессии являются «веса» аномалий метеорологического поля на станциях, которые окружают рассматриваемый узел регулярной сетки. Эти «веса» определяются раз и навсегда для всех узлов по пространственной корреляционной функции анализируемого поля. Сама эта функция предварительно оценивается по данным всех наблюдений этого поля (считаемого, как сказано выше, однородным и изотропным) из метеорологического архива. Кстати, «кригинг», используемый по умолчанию для построения изолиний во всем известной программе SURFER (<https://support.goldensoftware.com/hc/en-us/sections/204151518-Surfer>), является вариантом ОИ. За поле норм в нем принимается среднее значение всех интерполируемых данных, а пространственная корреляционная функция оценивается по отклонениям данных от этого среднего.

Быстро выяснилось, что ОА методом ОИ дает существенно лучшие результаты, если анализировать не аномалии рассматриваемого метеорологического поля относительно климата, а отклонения наблюдений этого поля от его прогноза на момент анализа. Эти последние отклонения, при достаточно хорошем прогнозе, существенно меньше, чем климатические аномалии и, следовательно, их линейная трактовка более оправдана.

Попутно укажем, что эта замена породила проблему, которая не была осознана вплоть до недавнего времени. А именно: прогностические поля содержат много мелкомасштабных особенностей, которые не могут быть схвачены существующей системой метеонаблюдений (кроме спутниковых). Эти фактически ненаблюдаемые особенности переходят в ОА в своем исходном виде. Неудивительно поэтому, что возникает ложное впечатление повышенной предсказуемости таких мелкомасштабных особенностей метеорологических полей по сравнению с предсказуемостью более крупных, реально наблюдаемых особенностей (Sonechkin, 2010).

Впервые в мире ОИ была реализована в Гидрометцентре СССР в середине 1960-х гг. (Четвериков, 1962). Ее продолжают использовать до настоящего времени в том виде, как она была описана в работе Багрова, Белоусова, Артановой и др. в 1978 г. Только ближе к концу XX в. ОИ была реализована в Европейском центре среднесрочных прогнозов погоды, а затем и во многих других зарубежных климатических центрах.

После появления спутниковых данных концепция ОА метеорологических полей потребовала критического пересмотра из-за того, что наблюдения на спутниках производятся не в дискретные синоптические сроки, а непрерывно. При этом ошибки спутниковых данных коррелируют друг с другом и зависят от состояния самой атмосферы (Гандин, 1971). Это приводит к плохой обусловленности матрицы взаимных корреляций наблюдаемого поля на соседних точках наблюдений и, в итоге, делает расчет «весов» ОИ ненадежным. В целях борьбы с этим была сформулирована новая концепция непрерывного 4-мерного усвоения разнородных наблюдений при ОА метеорологических полей (Bengtsson, 1975).

Впервые подход к ОА крупномасштабных особенностей метеорологических полей, удовлетворяющий этой концепции, был предложен в работе автора настоя-

щей статьи (Сонечкин, 1973). Этот подход использовал разработки методов оценки состояний систем автоматического управления, появившиеся во второй половине XX в., широко известные сейчас как фильтрация Р.Э. Калмана. Описание основ и дальнейшее развитие этого подхода было позднее опубликовано в целой серии работ. На основе этих работ в конце 1970-х гг. в Гидрометцентре СССР была реализована схема спектрального (для коэффициентов разложения метеорологических полей по сферическим функциям) ОА (Сонечкин, 1976; Казанджан, Сонечкин, 1978; Казанджан, Сонечкин, 1982; Сонечкин, Казанджан, 1982). Эта схема при официальных испытаниях превзошла по качеству ОА, основанный на ОИ, использовавшийся в Гидрометцентре СССР в то время.

Западные метеорологи ознакомились с методами калмановской фильтрации лишь десятилетием позже (Ghil, Cohn, Tavantzis et al., 1981; Le Dimet, Talagrand, 1986; Lorenc, 1986). Эти методы быстро стали там столь популярными, что почти все разработанные к настоящему времени на западе практические схемы ОА метеорологических полей (за ними закрепилось название «вариационные методы») провозглашаются происходящими от калмановской фильтрации.

В связи с разработкой детализованных моделей динамики океана ОА стал актуальным для океанологов. Подобно спутниковым наблюдениям за состоянием атмосферы, наблюдения состояния океана производятся нерегулярно, а их ошибки коррелированы в пространстве и во времени. Это заставило океанографов искать способы ОА, родственные вариационным методам. Некоторые такие ОА гидрофизических полей океана уже давно были анонсированы за рубежом (Derber and Rosati, 1989). Более недавние предложения довольно многочисленны (см., например, Mogensen, Baldasena, Weaver et. al., 2009).

Однако в этих работах не учитывается специфическое свойство гидрофизических полей океана, состоящее в их глобальной неоднородности и неизотропии. Особенно велика пространственная неоднородность этих полей вблизи берегов. При этом она велика не только в относительно малых пространственных масштабах, что особо свойственно прибрежным гидрофизическим процессам, но и в масштабах сотен километров, существенных для моделей общей циркуляции мирового океана.

Например, сток рек Южной Америки вносит существенную неоднородность практически всей акватории приэкваториальной Атлантики. Неоднородность также велика в окрестностях основных течений, таких как Гольфстрим. Поэтому «веса», с которыми ассимилируются различные океанографические наблюдения, должны существенно зависеть от того, в каких частях мирового океана произведены эти наблюдения.

Конечно, пространственная неоднородность иногда присуща и полям в атмосфере, например, в окрестностях атмосферных фронтов. Однако обычные схемы ОА метеорологических полей, применяемые в целях численного кратко- и среднесрочного прогноза погоды, еще пренебрегают этим обстоятельством, ибо шаг прогностических моделей общей циркуляции атмосферы все еще составляет порядка

сотни километров по горизонтали. Атмосферными фронтами при таком шаге еще можно пренебрегать. Если же заниматься мезомасштабным моделированием и прогнозированием, что сейчас становится все более актуальным, то такое пренебрежение, конечно, невозможно. Поэтому для ОА атмосферных фронтов надо использовать совсем другие схемы, которые не будут обсуждаться в данной работе.

Целью настоящей работы является указать, что калмановская фильтрация в чистом виде не может быть реализована при ОА гидрофизических полей по причине пространственной неоднородности этих полей, которая влечет непреодолимые вычислительные сложности, ибо для учета этой неоднородности калмановская фильтрация должна быть реализована на основе системы уравнений в частных производных, описывающих динамику океана с надлежащими неоднородными условиями на боковых границах океана.

Усвоение данных метеорологических наблюдений в контексте калмановской фильтрации

Суть калмановской фильтрации сейчас широко известна (Аоки, 1971; Заде, Дезозр, 1970; Липцер, Ширяев, 1974; Прохоров, Саульев, 1977). Ее подробное описание можно найти даже в Википедии. Поэтому нет необходимости приводить в данной статье все относящиеся к ней математические выкладки. Упомянем только, что первоначально фильтрация, учитывающая два источника информации о состоянии рассматриваемой системы (предварительный прогноз этого состояния и вновь поступившие наблюдения) была предложена Р.Э. Калманом (1960) для оценки состояния дискретной линейной системы автоматического управления по данным дискретных наблюдений, отягощенных гауссовским случайным шумом. Именно эта работа известна сейчас как фильтр Калмана. Оценка состояния любой системы, даваемая этим фильтром, подобно ОИ Гандина, является, в сущности, множественной линейной регрессией. Единственным ее отличием от ОИ является то, что «веса» пересчитываются заново при каждом конкретном усвоении данных наблюдений, поскольку точность предварительного прогноза в каждый раз различна. Мерой этой точности служит ковариационная матрица неопределенности состояния рассматриваемой системы. Для оценки этой матрицы фильтр Калмана содержит специальное разностное по времени уравнение.

Почти сразу же было сделано обобщение фильтра Калмана (известное теперь как фильтр Калмана-Бьюси) для непрерывной по времени линейной системы автоматического управления (Kalman, Вису, 1961). Этот фильтр аналогичен фильтру Калмана с тем только отличием, что оба его уравнения (уравнение оценки текущего состояния системы и уравнение оценки ковариационной матрицы неопределенности этой оценки) являются не разностными по времени, а дифференциальными.

Несколько позже появились различные обобщения калмановских фильтров для нелинейных систем автоматического управления, описываемых разностными по времени уравнениями, обыкновенными дифференциальными уравнениями и

даже уравнениями в частных производных (Аоки, 1971; Заде, Дезоэр, 1970; Липцер., Ширяев, 1974; Прохоров, Саульев, 1977). Ясно, что в приложении к таким системам калмановская фильтрация может быть только субоптимальной, т.к. она предполагает, что все прослеживаемые последовательности состояний рассматриваемой динамической системы не сильно отличаются от некоей опорной последовательности. Это позволяет прослеживать такие последовательности с помощью линейризованной системы уравнений, в лучшем случае добавляя члены второго порядка для учета систематического отклонения линейризованного прогноза от опорной последовательности.

Именно в такой постановке калмановская фильтрация была использована для ОА метеорологических полей в пионерской работе (Сонечкин, 1973). Причем было явно указано на субоптимальность такого ОА, поскольку вывод уравнений фильтра Калмана-Байеса был сделан на основе вероятностного (байесовского) подхода к статистике, чего не было в пионерской публикации Калмана (Kalman, 1960).

Вывод фильтра Калмана на основе байесовского подхода обычно не приводится. За рубежом этот вывод впервые был опубликован только в работе (Logens, 1986). Однако этот вывод важен для понимания того, откуда проистекают ограничения фильтра Калмана. Поэтому приведем описание байесовского подхода, следуя работам (Сонечкин, 1973; Сонечкин, 1974; Сонечкин, 1976; Сонечкин, 2000). Вектором $u(t)$ будем обозначать при этом истинное (оцениваемое) состояние атмосферы в момент t , и вектором $x(t) = G[u(t)] + \varepsilon(t)$ – наблюдения этого состояния, отягощенные случайными ошибками. Закон распределения ошибок наблюдений будем предполагать известным. Вектором $\hat{u}(t) = F[\hat{u}(t-\Delta t)]$ будем обозначать прогноз состояния атмосферы на момент t , составленный по данным ОА на момент $(t - \Delta t)$, которые будем обозначать двойной крышечкой как $\hat{\hat{u}}(t - \Delta t)$. Выпишем формулу, связывающую условные (условия перечислены после значка /) априорные и апостериорные вероятности наступления событий (перечислены через запятую) в виде:

$$p(u(t) / \hat{u}(t), x(t)) = \frac{p(u(t), \hat{u}(t), x(t))}{p(\hat{u}(t), x(t))} = \frac{p(u(t), \hat{u}(t)) p(x(t) / u(t), \hat{u}(t))}{p(\hat{u}(t), x(t))} = \frac{p(u(t) / \hat{u}(t)) p(\hat{u}(t)) p(x(t) / u(t), \hat{u}(t))}{p(\hat{u}(t)) p(x(t) / \hat{u}(t))}. \quad (1)$$

Учитывая независимость ошибок наблюдений от ошибок прогноза на момент этих наблюдений, получаем, что $p(x(t) / u(t) \hat{u}(t)) = p(x(t) / u(t))$. Поэтому окончательный вид апостериорной вероятности состояния атмосферы в момент времени t можно записать в виде:

$$p(u(t) / \hat{u}(t), x(t)) = \frac{p(u(t) / \hat{u}(t)) p(x(t) / u(t))}{p(x(t), \hat{u}(t))}, \quad (2)$$

что представляет собой известную формулу Байеса математической статистики, в которой в качестве априорной оценки состояния рассматриваемой системы фигурирует прогноз этого состояния.

Учитывая, что система эволюционных уравнений гидротермодинамики атмосферы является детерминированной, можно записать:

$$\begin{aligned} p(u(t) / \hat{u}(t)) &= p(u(t) / x(0), \dots, x(t - \Delta t)), \\ p(u(t) / \hat{u}(t), x(t)) &= p(u(t) / x(0), \dots, x(t - \Delta t), x(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда (2) переписывается в виде рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} p(u(t) / X(t)) &= p(u(t) / x(0), \dots, x(t)) = \text{const} \cdot p(u(t) / x(0), \dots, x(t - \Delta t)) p(x(t) / u(t)) = \\ &= \text{const} \cdot p(u(t) / X(t - \Delta t)) p(x(t) / u(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

в котором матрицей $X(t)$ обозначена вся последовательность наблюдений, предшествовавших наблюдениям в момент времени t .

За результат ОА на момент времени t естественно принимать то состояние атмосферы, апостериорная вероятность которого максимальна. Необходимый для этого расчет вероятностей всех возможных состояний практически осуществим лишь в случае, когда фигурирующие в (3) и (4) условные вероятности имеют конечномерные достаточные статистики и, более того, набор этих статистик не меняется со временем. Это будет так, только если все условные распределения вероятностей по типу являются самовоспроизводящимися. Для таких распределений вычисление всех апостериорных вероятностей можно заменять вычислением статистик этих распределений по известным статистикам априорного распределения. Из числа многомерных распределений требуемым свойством обладает гауссовское распределение $N(\mu, R)$. Его статистики (среднее μ и ковариационная матрица R) сохраняются преобразованиями (3) и (4) при условии, что прогностическая модель и оператор наблюдений линейны: $\hat{u}(t) = Au(t - \Delta t)$, $x(t) = Gu(t) + \varepsilon(t)$.

Согласно байесовскому подходу и в предположении гауссовости распределения ошибок, вероятность получить наблюдение $x(t)$ при условии, что истинное состояние системы есть $u(t)$, может быть записана как:

$$p(x(t) / u(t)) = \text{const} \cdot \exp \left\{ -0.5 [x(t) - G(t)u(t)]' R^{-1}(t) [x(t) - G(t)u(t)] \right\}, \quad (5)$$

где R^{-1} – обратная ковариационная матрица ошибок наблюдений. При этом вероятность истинного состояния атмосферы в предшествующий момент времени $(t - \Delta t)$ можно представить как:

$$p(u(t - \Delta t) / X(t - \Delta t)) = \text{const} \cdot \exp \left\{ -0.5 [u(t - \Delta t) - \hat{u}(t - \Delta t)]' \Sigma^{-1}(t - \Delta t) [u(t - \Delta t) - \hat{u}(t - \Delta t)] \right\}, \quad (6)$$

где Σ^{-1} – обратная ковариационная матрица возможных состояний атмосферы в момент времени $(t - \Delta t)$ при условии, что истинное состояние представлено наблюдениями $X(t - \Delta t)$. Из (5) и (6) получается, что распределение вероятностей ошибок линейного прогноза, возникающих за счет ошибок начальных данных $\hat{u}(t - \Delta t)$, тоже является гауссовским и равным:

$$p(u(t) / X(t - \Delta t)) = \text{const} \cdot \exp \left\{ -0.5 [u(t) - A\hat{u}(t - \Delta t)]' [A\Sigma(t - \Delta t)A']^{-1} [u(t) - A\hat{u}(t - \Delta t)] \right\}, \quad (7)$$

а апостериорные распределения всех возможных состояний $u(t)$ системы в момент времени t имеют вид:

$$p(u(t) / X(t)) = \text{const} \cdot \exp \left\{ \begin{array}{l} -0.5 [u(t) - A\hat{u}(t - \Delta t)]' [A\Sigma(t - \Delta t)A']^{-1} [u(t) - A\hat{u}(t - \Delta t)] - \\ 0.5 [x(t) - B(t)u(t)]R^{-1}(t)[x(t) - B(t)u(t)] \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Чтобы максимизировать это гауссовское распределение, достаточно минимизировать показатель его экспоненты:

$$J = [u(t) - A\hat{u}(t - \Delta t)]' M_1^{-1} [u(t) - A\hat{u}(t - \Delta t)] + [x(t) - B(t)u(t)]' M_2^{-1} [x(t) - B(t)u(t)], \quad (9)$$

где $M_1^{-1}(t) = [A\Sigma(t - \Delta t)A']^{-1}$ и $M_2^{-1}(t) = R^{-1}(t)$. Заметим, что в появившихся в конце XX в. так называемых вариационных методах ассимиляции данных сразу выписывается функционал типа (9). Иногда в него добавляются дополнительные слагаемые, учитывающие свойства рассматриваемой прогностической модели. Например, если модель основана на полных гидростатических уравнениях, то эти дополнительные члены требуют, чтобы результат ОА удовлетворял условиям гидростатики.

Для достижения минимума (9) надо определить и положить равной нулю вариационную производную этого функционала по $u(t)$. В качестве оценки состояния атмосферы в момент времени t при этом получается:

$$\hat{u}(t) = \hat{u}(t) + K(t)[x(t) - B(t)\hat{u}(t)], \quad (10)$$

где матрица, комбинирующая невязку новых наблюдений с прогнозом на момент этих наблюдений, имеет вид:

$$K(t) = A\Sigma(t - \Delta t)A'B'(t)[B(t)A\Sigma(t - \Delta t)A'B'(t) + R(t)]^{-1}, \quad (11)$$

зависящей от точности оценки состояния атмосферы на предыдущем шаге по времени $\Sigma(t - \Delta t)$. Точность последней на момент времени t должна пересчитываться по формуле

$$\Sigma(t) = [I - K(t)B(t)]A\Sigma(t - \Delta t)A'[I - K(t)B(t)]' + K(t)R(t)K'(t), \quad (12a)$$

если данные усваиваются с большим шагом по времени (обычно 6 или 12 часов).

Если же усвоение производится на каждом шаге по времени прогностической модели, то для этого надо интегрировать квадратично нелинейное уравнение:

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = A\Sigma(t) + \Sigma(t)A' + Q(t) + \Sigma(t)B'R^{-1}(t)[x(t) - G(u,t)]\Sigma(t). \quad (126)$$

Повторим, что пересчет (12а, б) – это единственное, что принципиально отличает фильтр Калмана от ОИ, ибо при ОИ ковариационная матрица поля, служащего первым приближением ОА, задается раз и навсегда. Важно, что при этом пересчете не накладывается тех жестких ограничений пространственной однородности и изотропии, которые действуют при расчете пространственных ковариаций анализируемого поля по архивным данным при ОИ Гандина.

В приложениях к ОА гидрометеорологических полей матрица $\Sigma(t)$ имеет огромную размерность, так что пересчет (12а,б) является крайне обременительным в вычислительном отношении. Кроме того, он является приближенным, ибо уравнения гидротермодинамики атмосферы нелинейны. Следовательно, надо использовать модификацию фильтра Калмана-Бьюси. Она состоит в замене матрицы A на матрицу $A(t) = \partial F(t) / \partial u(t)$ – якобиан нелинейной прогностической системы, который необходимо определять заново на каждом шаге усвоения данных для конечно-разностной аппроксимации системы прогностических уравнений. Это очень сложно сделать, ибо обычно для построения таких конечно-разностных аппроксимаций используются неявные схемы интегрирования. Кроме того, как показали численные эксперименты (для атмосферных моделей это было продемонстрировано в (Вейль., Кордзахия, Машкович и др., 1975), линеаризованный учет динамики, как правило, завышает реальную точность оценки текущего состояния рассматриваемой системы. В конце концов, матрица $\Sigma(t)$ теряет положительную определенность, и потому оценка состояния атмосферы фильтром Калмана-Бьюси расходится с истинным ее состоянием.

Для борьбы с этим явлением в (Сонечкин, 1974) было предложено использовать эмпирическую модификацию байесовского подхода (Роббинс, 1964). Вместо матрицы $\Sigma(t)$ и ее пересчета по формулам (12а, б), при этом используется матрица невязок текущих наблюдений с прогнозом на момент этих наблюдений:

$$M(t) = \left\{ \left[\frac{\partial F(u(t))}{\partial u(t)} \right] \Sigma(t) \left[\frac{\partial F(u(t))}{\partial u(t)} \right]' + R(t) \right\} = \left[x(t) - B(t)\hat{u}(t) \right] \left[x(t) - B(t)\hat{u}(t) \right]', \quad (13)$$

где $\partial F(u(t)) / \partial u(t)$ – якобиан используемой нелинейной прогностической модели $\hat{u}(t) = F(u(t - \Delta t))$. Матрица $M(t)$ пересчитывается на каждом шаге по времени по формуле:

$$\bar{M}(t) = \bar{M}(t - \Delta t) + \gamma(t) \left\{ \left[x(t) - F(t)\hat{u}(t - \Delta t) \right] \left[x(t) - F(t)\hat{u}(t - \Delta t) \right]' - \bar{M}(t - \Delta t) \right\}. \quad (14)$$

Важно, что размерность этой матрицы много меньше, чем размерность матрицы $\Sigma(t)$. Например, если усваивать новые наблюдения по одному, то матрица $\bar{M}(t)$ будет просто скаляром. Коэффициент $0 < \gamma(t) < 1$ подбирается так, как это рекомендовано в методах так называемой стохастической аппроксимации (Невельсон, Хасьминский, 1972). При этом вклады оценок (15) на предшествующих временных шагах уменьшаются с экспоненциальной скоростью. В работе Кордзахия (1976) в применении к простой квазигеострофической модели атмосферы было продемонстрировано, что этот прием предотвращает расходимость фильтра Калмана-Бьюси.

Зарубежные метеорологи пришли к фильтру Калмана как средству ОА метеорологических полей лишь в начале 1980-х гг. (Ghil, Cohn, Tavantzis et al, 1981; Le Dimet, Talagrand, 1986; Lorenc, 1986). Столкнувшись с проблемой расходимости фильтров Калмана-Бьюси, они еще позже пришли к так называемым ансамблевым фильтрам Калмана (Dee, 1991; Evensen, 1994), в которых на момент поступления новых наблюдательных данных продуцируется не один, а несколько (ансамбль) прогнозов. Затем вычисляется ковариационная матрица рассеяния этих прогнозов, которая используется вместо матрицы $\Sigma(t)$. По существу такой способ оценки матрицы $\Sigma(t)$ делает этот метод ОА близким к ОИ. Укажем, что ансамблевые калмановские фильтры имеют изъян, хорошо известный в практике использования ансамблевых кратко- и среднесрочных прогнозов погоды. Он состоит в том, что изменения реальной погоды зачастую происходят совсем не так, как указывает ансамбль из-за того, что прогностическая модель не идеальна. Так что малое рассеяние ансамбля прогнозов не гарантирует их точность. Тем самым расходимость ансамблевых фильтров Калмана-Бьюси не исключается.

Тем не менее, различные практические модификации ансамблевой калмановской фильтрации широко используются сейчас за рубежом для обеспечения численных схем прогноза погоды, а также ре-анализов архивных гидрометеорологических данных. Примером может служить схема, которая использована в Европейском центре среднесрочных прогнозов погоды (Dee, Uppala, Simmons et al., 2011), который считается сейчас одним из лучших для ре-анализа ERA-Interim.

Усвоение данных о состоянии океана

Чтобы в полной мере реализовать концепцию непрерывного четырехмерного усвоения данных наблюдений за состоянием океана, надо учитывать, что динамика океана описывается уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial u(t, \phi)}{\partial t} = F(u, \phi, t) + w(u, \phi, t), \phi \in D \quad (15)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями. В том числе, имеются горизонтальные краевые условия:

$$H(u, \phi, t) = v(\phi, t), \phi \in \partial D. \quad (16)$$

Слагаемое $w(u, \varphi, t)$ в (17) введено для учета отличий модели от реальной динамики.

Наблюдения состояния океана производятся не только внутри, но и на границах области и, вообще говоря, непрерывно по времени:

$$x(\varphi, t) = G(u, t, \varphi) + \varepsilon(\varphi, t), \varphi \in \bar{D} = D + \partial D. \quad (17)$$

Поэтому в применении к (15)–(17), фильтр Калмана-Бьюси также должен записываться с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Предложения, как записать фильтр Калмана-Бьюси для распределенных, т.е. описываемых уравнениями в частных производных, систем автоматического управления, были опубликованы еще в 1970-е гг. Некоторые из этих работ (например, Arte, Lamba, 1972; Lamont, Kumar, 1972; Mendel, 1975) уже были использованы в Сонечкин (2000). Однако при практической реализации системы ОА метеорологических полей в Гидрометцентре СССР (Казанджан, Сонечкин, 1978; Казанджан, Сонечкин, 1982; Сонечкин, Казанджан, 1982) было использовано разложение анализируемых полей по сферическим функциям. Тем самым уравнения фильтра Калмана-Бьюси удалось свести к более простой в вычислительном отношении системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

К сожалению, такое упрощение невозможно при ОА океанографических данных, поскольку океаны ограничены по горизонтали и свойства гидрофизических полей океана крайне неоднородны в прибрежных районах по сравнению с открытым океаном. Неоднородность и неизотропия анализируемых полей велики также в окрестностях Гольфстрима и других основных океанических течений. Граничные условия (16), вообще говоря, меняются во времени за счет речного стока и таяния ледниковых щитов Антарктиды и Гренландии.

Между тем, насколько известно автору данной статьи, все реализованные к настоящему времени за рубежом системы ассимиляции океанографических данных игнорируют эти обстоятельства. Они также игнорируются в теоретических работах по этому вопросу, начиная с пионерской публикации (Ghil, 1989) и вплоть до публикаций последних лет у нас и за рубежом (см., например, Агошков, Ипатова, Залесный и др., 2010; Кныш, Коротаев, Мизюк и др., 2012; Ghil, 1989; Chassignet, Hurlburt, Metzger et al., 2009). В принципе, учет этих обстоятельств, конечно, возможен (см., например, Taillandier, Echevin, Mortier et al., 2004). Но до сих пор он не реализован в практических схемах ОА гидрофизических полей мирового океана.

В результате, несмотря на анонсированные успехи в экспериментах по усвоению океанографических данных, оперативный анализ полей температуры поверхности мирового океана, помещаемый на сайте Гидрометцентра России, продолжает основываться на интерполяции, аналогичной той, что служит для ОА метеорологических данных. Пространственная неоднородность гидрофизических характеристик океана игнорируется также в недавно разработанной в нашей стране системе усвоения данных дрейфующих буев-профилемеров Арго (Лебедев, 2016). Посколь-

ку эта система имеет целью ОА только крупномасштабных особенностей гидрофизических полей океана, такое игнорирование, вероятно, допустимо.

Критерием качества оптимальной системы усвоения океанографических данных должна быть взвешенная сумма квадратов следующих ошибок:

– ошибки наблюдений

$$e_1(t, \phi) = x(t, \phi) - G(u, t, \phi), \phi \in \bar{D}, \quad (18)$$

– динамической ошибки внутри области D

$$e_2(t, \phi) = \frac{\partial u(t, \phi)}{\partial t} - F(u, t, \phi), \phi \in D, \quad (19)$$

– динамической ошибки на границе области δD

$$e_3(t, \phi) = H(t, \phi) - v(u, t, \phi), \phi \in \partial D. \quad (20)$$

Этот критерий имеет вид квадратичного функционала:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_D \int_D e_1'(t, \phi) R^{-1}(t, \phi, \psi) e_1(t, \psi) d\phi d\psi dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial D} \int_{\partial D} e_1'(t, \phi) R^{-1}(t, \phi, \psi) e_1(t, \psi) d\phi d\psi dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_D \int_D e_2'(t, \phi) Q^{-1}(t, \phi, \psi) e_2(t, \psi) d\phi d\psi dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial D} \int_{\partial D} e_3'(t, \phi) P^{-1}(t, \phi, \psi) e_3(t, \psi) d\phi d\psi dt, \quad (21)$$

где $R(t, \phi, \psi)$, $Q(t, \phi, \psi)$, $P(t, \phi, \psi)$ – ковариационные матрицы ошибок наблюдений и гидрофизических шумов внутри и на границах океана, а t_0 и t_1 – временной интервал, наблюдения внутри которого ассимилируются одновременно (шаг по времени модели океана).

Решение задачи минимизации критерия качества (21) может быть достигнуто разными способами. В этом способе гидрометеорологические шумы рассматриваются как новые переменные, наряду с $u(\phi, t)$, и построение непрерывного по времени фильтра Калмана-Бьюси сводится к минимизации квадратичного функционала, включающего ограничения типа равенства. Эти ограничения возникают при учете динамических ошибок (19), (20). Смысл этих ограничений в том, что получающаяся оценка состояния океана удовлетворяет уравнениям используемой модели океана. Поэтому при прогнозе по начальным данным, соответствующим этой оценке не возникает никаких шоковых эффектов.

При использовании любого из возможных способов минимизации (21) получающиеся уравнения для оценки состояния океана и оценки точности этой оценки довольно громоздки. Их общий вид, основанный на принципе максимума Л.С. Понтрягина, выписан в работе Сонечкин (1976). Реализация этих уравнений, даже с помощью наиболее мощных современных вычислительных средств, практически невозможна. По этой причине практический ОА данных о состоянии океана должен быть все еще основан на ОИ. Но в ней надо явно учитывать различия в пространственных ковариациях гидрофизических полей вблизи берегов и в окрест-

ностях основных течений по сравнению с открытым океаном. Предварительным условием этого должно быть получение достаточно достоверных статистических данных об изменчивости гидрофизических полей в разных частях мирового океана.

Работа выполнена по Государственной программе № 149-2018-0002 и при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-50-00095).

Литература

- Агошков В.И., Ипатов В.М., Залесный В.Б., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Известия РАН, физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 6. С. 734–770.
- Аоки М.* Оптимизация стохастических систем: М.: Наука, 1971. 424 с.
- Багров А.Н.* Оперативная схема объективного анализа аэрологической информации для северного полушария // Труды Гидрометцентра СССР. 1978. Вып. 196. С. 3–11.
- Багров А.Н., Белоусов С.Л., Артанова А.К., Локтионова Е.А.* Оперативная схема объективного анализа приземных метеорологических полей на северном полушарии для прямоугольной сетки с переменным шагом // Труды Гидрометцентра СССР. 1974. Вып. 123. С. 37–47.
- Вейль И.Г., Кордзахия Г.И., Машкович С.А., Сонечкин Д.М.* Численные эксперименты по четырехмерному анализу на основе динамико-стохастического подхода // Метеорология и Гидрология. 1975. № 7. С. 11–20.
- Гандин Л.С.* Объективный анализ метеорологических полей: Л.: Гидрометеиздат, 1963. 286 с.
- Гандин Л.С.* Проблемы четырехмерного усвоения данных метеорологических наблюдений // Метеорология и Гидрология. 1971. № 3. С. 15–21.
- Заде Л., Дезоэр И.* Теория систем: М.: Наука, 1970. 703 с.
- Казанджан Г.П., Сонечкин Д.М.* Спектральный подход к объективному анализу метеорологических полей // Труды Гидрометцентра СССР. 1978. Вып. 210. С. 72–85.
- Казанджан Г.П., Сонечкин Д.М.* Схема спектрального объективного анализа аэрологических наблюдений // Труды Гидрометцентра СССР. 1982. Вып. 243. С. 85–101.
- Кныш В.В., Коротаев Г.К., Мизюк А.И., Саркисян А.С.* Усвоение гидрологических полей Мирового океана // Известия РАН, физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 57–66.
- Кордзахия Г.И.* Численное исследование устойчивости процедур четырехмерного анализа при динамико-стохастическом подходе // Труды Гидрометцентра СССР. 1976. Вып. 181. С. 77–89.
- Лебедев К.В.* АРГО-модель исследования глобального океана (АМИГО) // Океанология. 2016. Т. 56. № 2. С. 186–196.
- Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974. 696 с.
- Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.
- Прохоров М.Б., Саульев В.К.* Метод оптимальной фильтрации Калмана-Бьюси и его обобщения: ВИНТИ. Итоги науки и техники, сер. Мат. Анал. 1977. Т. 14. С. 167–207.
- Роббинс Г.* Эмпирический байесовский подход к статистике // Математика. 1964. № 2. С. 133–140.

- Сонечкин Д.М.* Обоснование четырехмерного (непрерывного) усвоения данных метеорологических наблюдений на основе динамико-статистического подхода // Метеорология и Гидрология. 1973. № 4. С. 13–20.
- Сонечкин Д.М.* Эмпирическая байесовская регуляризация в задаче термического зондирования атмосферы // Известия РАН, сер. физика атмосферы и океана // 1974. Т. 10. № 2. С. 146–155.
- Сонечкин Д.М.* Динамико-стохастический подход к задаче объективного анализа данных разнородных метеорологических наблюдений // Труды Гидрометцентра СССР. 1976. Вып. 181. С. 54–76.
- Сонечкин Д.М.* О детализации объективного анализа метеорологических полей // Труды Гидрометцентра России. 2000. Вып. 331. С. 97–105.
- Сонечкин Д.М., Казанджан Г.П.* Итерационная схема спектрального объективного анализа синоптических и аэрологических наблюдений // Труды Гидрометцентра СССР. 1982. Вып. 251. С. 17–26.
- Четвериков И.А.* Схема объективного анализа карт барической топографии методом оптимальной интерполяции // Труды ЦИП. 1962. Вып. 102. С. 3–12.
- Arte S.R., Lamba S.S.* Derivation of an optimal estimator for distributed parameter systems via maximum principle // IEEE Trans. Automat Contr. 1972. Vol. 17. No. 3. P. 388–390.
- Bengtsson L.* Four-dimensional assimilation of meteorological observations // GARP Publ. 1975. Ser. N15. 76 p
- Chassignet E.P., Hurlburt H.E., Metzger E.J., Smedstad O.M., Cummings J.A., Halliwell G.R., Bleck R., Baraille R., Wallcraft A.J., Lozano C., Tolman H.L., Srinivasan A., Hankin S., Cornillon P., Weisberg R., Barth A., He R., Werner F., Wilkin J.* US GODAE: Global ocean prediction with the hybrid coordinate ocean model (HYCOM) // Oceanography. 2009. Vol. 22. P. 64–75.
- Dee D.P.* Simplification of the Kalman filter for meteorological data assimilation // QJRMS. 1991. Vol. 117. P. 365–384.
- Dee D.P., Uppala S.M., Simmons A.J., Berrisford P., Poli P., Kobayashib S., Andrae U., Balmaseda M.A., Balsamo G., Bauer P., Bechtold P., Beljaars A.C.M., van de Bergd L., Bidlot J., Bormann N., Delsol C., Dragani R., Fuentes M., Geer A.J., Haimbergere L., Healy S.B., Hersbach H., Holm E.V.H, Isaksen L., Kallberg P.K., Kohlera M., Matricardia M., McNally A.P., Monge-Sanz B.M., Morcrette J.-J., Park B.-K., Peubeya C., deRosnay P., Tavolato C., Thepautaan J.-N. , Vitart F.* The ERA-Interim reanalysis: configuration and performance of the data assimilation system // QJRMS. 2011. Vol. 137. P. 553–597.
- Evensen G.* Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics // J. Geophys. Res. 1994. Vol. 99. No. C5. P. 10143–10162.
- Ghil M.* Meteorological data assimilation for oceanographers 1. Description and theoretical framework // Dyn. Atmos. Oceans. 1989. Vol. 133. No. 4. P. 171–218.
- Ghil M., Cohn S.E., Tavantzis J., Bube K., Isaacson E.* Applications of estimation theory to numerical weather prediction // in Dynamical Meteorology: Data assimilation methods, (Bengtsson L., Ghil M., Kaellen E. eds.), New York: Springer, 1981. P. 139–184.
- Kalman R.E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // Journal of Basic Engineering. 1960. Vol. 82. No. 1. P. 35–45.
- Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME. 1961. Ser. D83. P. 95–108.
- Lamont G.B., Kumar K.S.P.* State estimation in distributed parameter systems via least squares and invariant embedding // J. Mathem. Anal. Appl. 1972. Vol. 38. No. 3. P. 588–606.

Д.М. Сонечкин

- Le Dimet F.X., Talagrand O.* Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects // *Tellus*. 1986. Vol. 38A. P. 97–110.
- Lorenc A.C.* Analysis methods for numerical weather prediction // *QJRMS*. 1986. Vol. 112. P. 1177–1194.
- Mendel J.M.* Multistage least-squares parameter estimation // *IEEE Transactions on Automat. Control*. 1975. Vol. 20. No. 6. P. 775–782.
- Sonechkin D.M.* Observability of planetary waves and their predictability in the ECMWF H500 forecasts // *Advances in Sciences and Researches*. 2010. Vol. 4. P. 5–7.

A PROBLEM WITH COASTS AT ASSIMILATION OF OCEANOGRAPHIC DATA

Sonechkin D.M.

*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
36, Nakhimovskiy prospect, Moscow, 117997, Russia, e-mail: dsonech@ocean.ru
Submitted 10.10.2018, accepted 01.11.2018*

The question is considered how it is possible to assimilate the data which are necessary to determine the initial conditions for integration of the general oceanic circulation models. The fundamental difference of such assimilation in comparison with similar assimilation of the data on the initial atmospheric condition is specified. This difference results from an essential spatial inhomogeneity of the oceanic processes in coastal zones and in vicinities of the main oceanic currents in comparison with the open ocean.

Keywords: assimilation of the oceanographic observations, spatial inhomogeneity of ocean, optimal interpolation, Kalman filter

References

- Agoshkov V.I., Ipatova V.M., Zalesnyy V.B., Parmuzin E.I., and Shutayayev V.P.* Zadachi variatsionnoy assilyatsii dannykh nablyudeniy dlya modeley obshchey tsirkulyatsii okeana i metody ikh resheniya. *Izvestiya RAN fizika atmosfery i okeana*, 2010, Vol. 46, No. 6, pp. 734–770.
- Aoki M.* Optimizatsiya stokhasticheskikh sistem. Moskva: Nauka, 1971, 424 p.
- Arte S.R. and Lamba S.S.* Derivation of an optimal estimator for distributed parameter systems via maximum principle. *IEEE Trans. Automat Contr*, 1972, Vol. 17, No. 3, pp. 388–390.
- Bagrov A.N.* Operativnaya skhema obyektivnogo analiza aerologicheskoy informatsii dlya severnogo polushariya. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1978, Vol. 196, pp. 3–11.
- Bagrov A.N., Belousov S.L., Artanova A.K., and Loktionova E.A.* Operativnaya skhema obyektivnogo analiza prizemnykh meteorologicheskikh poley na severnom polusharii dlya pryamougolnoy setki s peremennym shagom. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1974, Vol. 123, pp. 37–47.
- Bengtsson L.* Four-dimensional assimilation of meteorological observations. *GARP Publ.*, 1975, Ser. No. 15, 76 p.
- Chassignet E.P., Hurlburt H.E., Metzger E.J., Smedstad O.M., Cummings J.A., Halliwell G.R., Bleck R., Baraille R., Wallcraft A.J., Lozano C., Tolman H.L., Srinivasan A., Hankin S., Cornillon P., Weisberg R., Barth A., He R., Werner F., and Wilkin J.* US GODAE: Global

- ocean prediction with the hybrid coordinate ocean model (HYCOM). *Oceanography*, 2009, Vol. 22, pp. 64–75.
- Chetverikov I.A. Skhema obyektivnogo analiza kart baricheskoy topografii metodom optimalnoy interpolatsii. *Trudy TsIP*, 1962, Vol. 102, pp. 3–12.
- Dee D.P. Simplification of the Kalman filter for meteorological data assimilation, *QJRMS*, 1991, Vol. 117, pp. 365–384.
- Dee D.P., Uppala S.M., Simmons A.J., Berrisford P., Poli P., Kobayashib S., Andrae U., Balmaseda M.A., Balsamo G., Bauer P., Bechtold P., Beljaars A.C.M., van de Bergd L., Bidlot J., Bormann N., Delsol C., Dragani R., Fuentes M., Geer A.J., Haimbergere L., Healy S.B., Hersbach H., Holm E.V.H., Isaksen L., Kallberg P.K., Kohlera M., Matricardia M., McNally A.P., Monge-Sanz B.M., Morcrette J.-J., Park B.-K., Peubeya C., deRosnay P., Tavolato C., Thepautaand J.-N., and Vitart F. The ERA-Interim reanalysis: configuration and performance of the data assimilation system. *QJRMS*, 2011, Vol. 137, pp. 553–597.
- Evensen G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 1994, Vol. 99, No. C5, pp. 10143–10162.
- Gandin L.S. Obyektivnyy analiz meteorologicheskikh poley. Leningrad: Gidrometeoizdat. 1963, 286 p.
- Gandin L.S. Problemy chetyrekhmernogo usvoyeniya dannykh meteorologicheskikh nablyudeniy, *Meteorologiya i Gidrologiya*, 1971, No. 3, pp. 15–21.
- Ghil M. Meteorological data assimilation for oceanographers 1. Description and theoretical framework. *Dyn. Atmos. Oceans*, 1989, Vol. 133, No. 4, pp. 171–218.
- Ghil M., Cohn S.E., Tavantzis J., Bube K., and Isaacson E. Applications of estimation theory to numerical weather prediction in Dynamical Meteorology: Data assimilation methods, (Bengtsson L., Ghil M., Kaellen E. eds.). New York: Springer, 1981, pp. 139–184.
- Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960, Vol. 82, No. 1, pp. 35–45.
- Kalman R. and Bucy R. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME*, 1961, Ser. D83, pp. 95–108.
- Kazandzhan G.P. and Sonechkin D.M. Skhema spektralnogo obyektivnogo analiza aerologicheskikh nablyudeniy. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1982, Vol. 243, pp. 85–101.
- Kazandzhan G.P. and Sonechkin D.M. Spektralnyy podkhod k obyektivnomu analizu meteorologicheskikh poley. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1978, Vol. 210, pp. 72–85.
- Knysh V.V., Korotayev G.K., Mizyuk A.I., and Sarkisyan A.S. Usvoeniye gidrologicheskikh poley Mirovogo okeana. *Izvestiya RAN fizika atmosfery i okeana*, 2012, Vol. 48, No. 1, pp. 57–66.
- Kordzakhya G.I. Chislennoye issledovaniye ustoychivosti protsedur chetyrekhmernogo analiza pri dinamiko-stokhasticheskom podkhode. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1976, Vol. 181, pp. 77–89.
- Lamont G.B. and Kumar K.S.P. State estimation in distributed parameter systems via least squares and invariant embedding. *J. Mathem. Anal. Appl.* 1972, Vol. 38, No. 3, pp. 588–606.
- Le Dimet F.X. and Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects. *Tellus*. 1986, Vol. 38A, pp. 97–110.
- Lebedev K.V. ARGO-model issledovaniya globalnogo okeana (AMIGO). *Okeanologiya*, 2016, Vol. 56, No. 2, pp. 186–196.
- Liptser R.Sh. and Shirayev A.N. Statistika sluchaynykh protsessov (nelineynaya filtratsiya i smezhnyye voprosy). Moskva: Nauka, 1974, 696 p.
- Lorenz A.C. Analysis methods for numerical weather prediction. *QJRMS*, 1986, Vol. 112, pp. 1177–1194.

- Mendel J.M.* Multistage least-squares parameter estimation. *IEEE Transactions on Automat. Control*, 1975, Vol. 20, No. 6, pp. 775–782.
- Nevelson M.B. and Khasminskiy R.Z.* Stokhasticheskaya approksimatsiya i rekurrentnoye otsenivaniye. Moskva: Nauka, 1972, 304 p.
- Prokhorov M.B. and Saul'yev V.K.* Metod optimalnoy filtratsii Kalmena-Byusi i ego obobshcheniya. *VINITI, Itogi nauki i tekhniki. ser. Mat. Anal*, 1977, Vol. 14, pp. 167–207.
- Robbins G.* Empiricheskiy bayesovskiy podkhod k statistike. *Matematika*. 1964, No. 2, pp. 133–140.
- Sonechkin D.M. and Kazandzhan G.P.* Iteratsionnaya skhema spektralnogo obyektivnogo analiza sinopticheskikh i aerologicheskikh nablyudeniy. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1982, Vol. 251, pp. 17–26.
- Sonechkin D.M.* Dinamiko-stokhasticheskiy podkhod k zadache obyektivnogo analiza dannykh raznorodnykh meteorologicheskikh nablyudeniy. *Trudy Gidromettsentra SSSR*, 1976, Vol. 181, pp. 54–76.
- Sonechkin D.M.* Empiricheskaya bayesovskaya regularizatsiya v zadache termicheskogo zondirovaniya atmosfery. *Izvestiya RAN ser. fizika atmosfery i okeana*, 1974, Vol. 10, No. 2, pp. 146–155.
- Sonechkin D.M.* O detalizatsii obyektivnogo analiza meteorologicheskikh poley. *Trudy Gidromettsentra Rossii*, 2000, Vol. 331, pp. 97–105.
- Sonechkin D.M.* Obosnovaniye chetyrekhmernogo (nepriyvno) usvoyeniya dannykh meteorologicheskikh nablyudeniy na osnove dinamiko-statisticheskogo podkhoda. *Meteorologiya i Gidrologiya*, 1973, No. 4, pp. 13–20.
- Sonechkin D.M.* Observability of planetary waves and their predictability in the ECMWF H500 forecasts. *Advances in Sciences and Researches*, 2010, Vol. 4, pp. 5–7.
- Veyl I.G., Kordzakhiya G.I., Mashkovich S.A., and Sonechkin D.M.* Chislennyye eksperimenty po chetyrekhmernomu analizu na osnove dinamiko-stokhasticheskogo podkhoda. *Meteorologiya i Gidrologiya*, 1975, No. 7, pp. 11–20.
- Zade L. and Dezoer I.* Teoriya sistem. Moskva: Nauka, 1970, 703 p.